Chap. 4 : Fonctions polynomiales de degré 2

1/ Rappels sur la fonction carrée

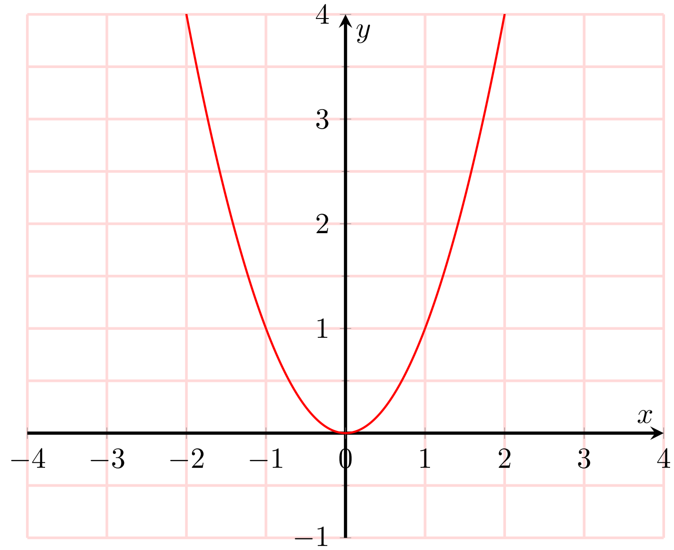
Définition

La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x^2$
Sa courbe représentative dans un repère orthonormé est une **parabole** de sommet le point $O(0,0)$.

Propriétés

La courbe de la fonction carrée est **symétrique** par rapport à **l'axe des ordonnées** et est située **entièrement au-dessus de l'axe des abscisses.**

Elle est de plus décroissante sur $]-\infty; 0]$ puis croissante sur $[0; +\infty[$.



Vous avez déjà étudié les **fonctions affines** au collège, c'est-à-dire de la forme $x \mapsto ax + b$ où a et b sont des réels ainsi que la **fonction carrée** $x \mapsto x^2$ en classe de seconde.

Nous allons maintenant étudier les fonctions réelles qui sont une combinaison de ces deux fonctions, autrement dit celles de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels.

2/ Définitions et allures des courbes

Définition

On appelle fonction **polynomiale (ou fonction polynôme) de degré** 2 toute fonction réelle de la forme

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

2 / 1 Cas 1 et 2 : Multiples de la fonction carrée et translations associées

Activité n° 1 : À l'aide d'une calculatrice, visualiser les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ des fonctions suivantes :

$$a) \quad x \mapsto 0,5x^2 \qquad b) \quad x \mapsto 3x^2 \qquad c) \quad x \mapsto -x^2 \qquad d) \quad x \mapsto -2x^2$$

1. Indiquer le type de courbe (droite, parabole, autres) pour $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$
2. Pour chacune des fonctions, déterminer graphiquement
   — l'abscisse des sommets,
   — l'axe de symétrie,
   — le tableau de variations.
   Qu'observez-vous ?
3. Mêmes questions pour les fonctions :

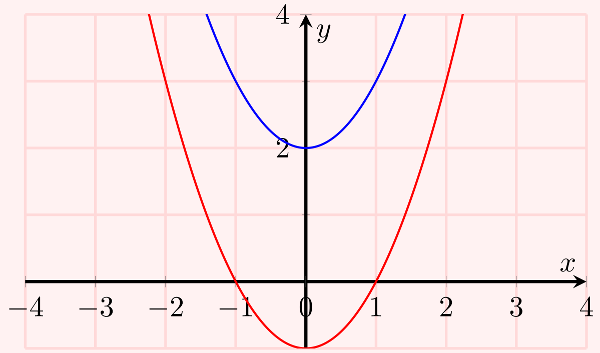
$$a) \quad x \mapsto 1,5x^2 + 2 \qquad b) \quad x \mapsto 3x^2 - 3 \qquad c) \quad x \mapsto -x^2 + 4$$

Propriétés: Allure des courbes et sens de variation

Les fonctions polynomiales de la forme $x \mapsto ax^2$ et $x \mapsto ax^2 + c$

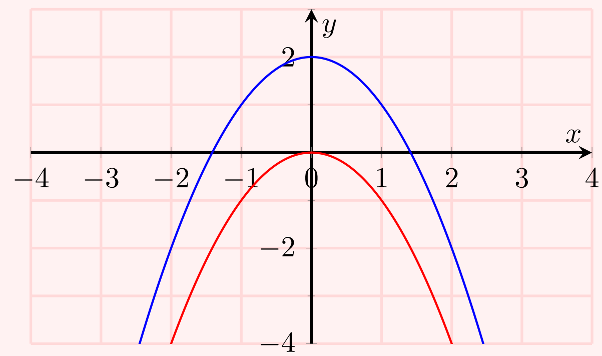
où a et c des nombres réels avec $a \neq 0$ sont représentées par des ________________.

★ Si $a > 0$, la fonction est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$



la parabole est tournée vers le ____
et le sommet est un ________________.

★ Si $a < 0$, la fonction est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$



la parabole est tournée vers le ____
et le sommet est un ________________.

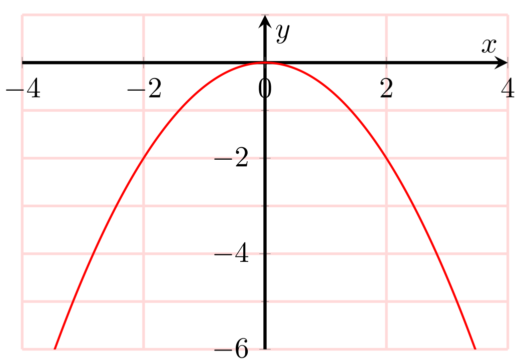
Propriétés: Sommets & Axes de symétrie

Soient a et c des nombres réels avec $a \neq 0$ et $c \geq 0$.

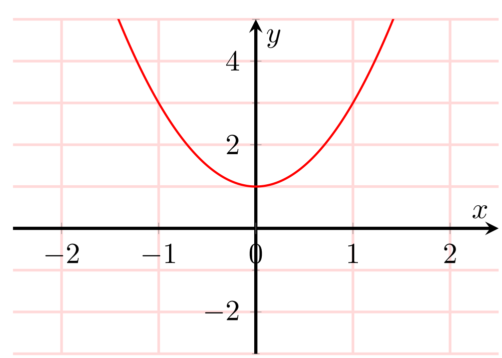
★ Pour les paraboles de la forme $y = ax^2$ et $y = ax^2 + c$, l'abscisse de leur **sommet** se situe en $x_s =$ ____________ et **l'axe de symétrie** est ____________________________________

Exercice n° 1 : En vous aidant uniquement du cours, associer chaque fonction à sa courbe correspondante.

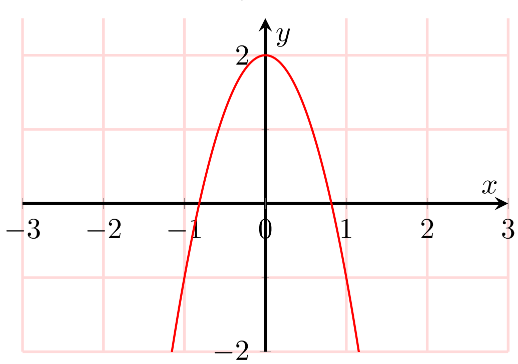
1) $f(x) = 2x^2$ 2) $g(x) = -3x^2 + 2$ 3) $h(x) = -0.5x^2$ 4) $k(x) = 2x^2 + 1$



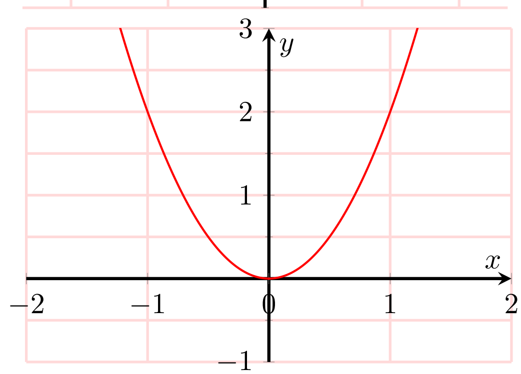
(A)



(B)



(C)



(D)

2 / 2 3ème cas : La forme factorisée

Activité nº 2 :

1. Développer et simplifier les expressions suivantes

   1) $f(x) = (x+1)(x+3)$ 2) $f(x) = 2(x-1)(x+2)$ 3) $f(x) = 3(x-3)(x-7)$

2. Quel type de fonction obtient-on à chaque fois ?

Définition

On dit qu'un polynôme du second degré f est sous forme ____________________________ si on peut trouver des réels a, x_1 et x_2 tels que $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ pour tout x réel

Activité nº 3 : Soient deux fonctions définies pour la variable réelle x par

$$x \mapsto 2(x-5)(x-3) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto -1,5(x-1)(x+3)$$

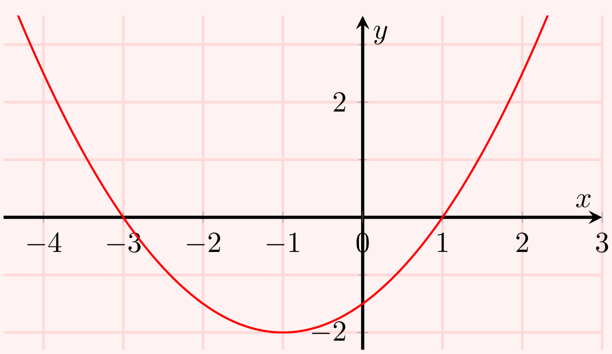
1. Tracer les courbes des fonctions ci-dessus sur la calculatrice.
2. En observant les intersections avec l'axe des abscisses, conjecturer leur axe de symétrie.

Propriétés: Allure des courbes

Les fonctions polynomiales de la forme $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$

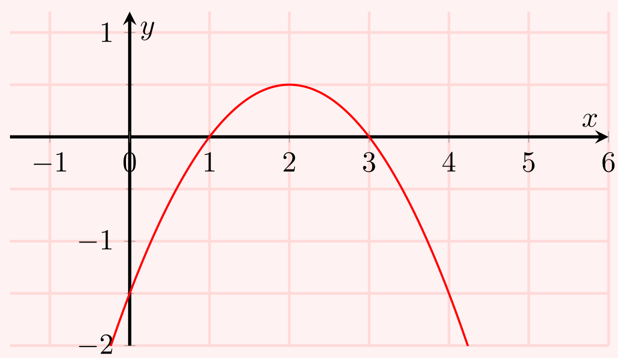
où a, x_1 et x_2 des nombres réels et $a \neq 0$ sont représentées par des __________________.

★ Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le ______



et le sommet est un __________________.

★ Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le ______.



et le sommet est un __________________.

Propriétés: Sommets & Axes de symétrie

Soient a, x_1 et x_2 des nombres réels avec $a \neq 0$.

Pour les fonctions d'équation $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, l'abscisse de leur **sommet** x_s est le ____________ du segment formé par x_1 et x_2. L'**axe de symétrie** est donc la droite d'équation ____________________

Propriétés: Sens de variation

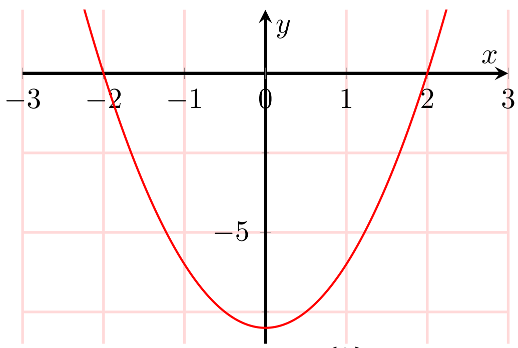
Pour les fonctions d'équation $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ et de sommet x_s.

★ Si $a > 0$ alors f est décroissante sur $]-\infty; x_s]$ puis croissante sur $[x_s; +\infty[$

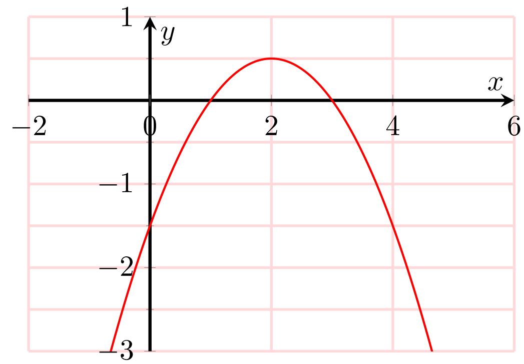
★ Si $a < 0$ alors f est croissante sur $]-\infty; x_s]$ puis décroissante sur $[x_s; +\infty[$

Exercice nº 2 : En vous aidant uniquement des propriétés précédentes et sans utiliser la calculatrice, associer chaque fonction à la courbe correspondante.

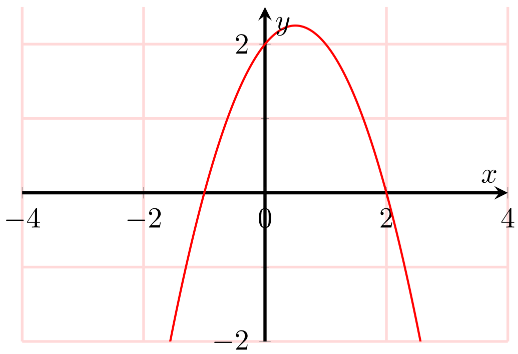
1) $f(x) = -0.5(x-3)(x-1)$ 2) $g(x) = -(x-2)(x+1)$ 3) $h(x) = (x+1)(x+3)$ 4) $k(x) = 2(x-2)(x+2)$



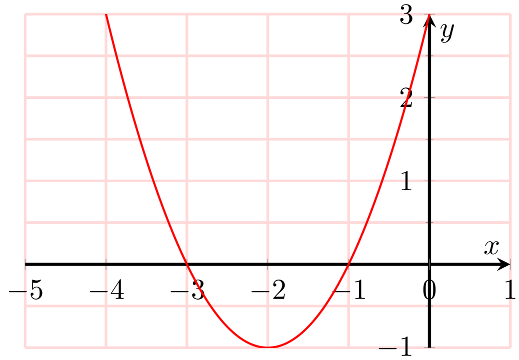
(A)



(B)



(C)



(D)

2 / 3 Le cas particulier $ax^2 - c^2$

Propriétés: Identité remarquable

Grâce à l'identité remarquable
$$x^2 - c^2 = (x+c)(x-c)$$
toute fonction polynomiale f de degré 2 de la forme $f(x) = ax^2 - c^2$ avec $a \neq 0$ peut s'écrire sous forme factorisée.

Exercice nº 3 : Écrire sous forme factorisée les fonctions polynomiales suivantes

1. $f(x) = x^2 - 4$
2. $f(x) = x^2 - 36$
3. $f(x) = 2x^2 - 8$
4. $f(x) = 3x^2 - 48$
5. $f(x) = 5x^2 - 320$
6. $f(x) = 4x^2 - 196$

3/ Racines et signe du polynôme

On a vu que l'on peut déterminer l'axe de symétrie et calculer les coordonnées du sommet de la parabole associée à la fonction polynomiale, on aimerait maintenant connaitre le **signe** de la fonction. C'est à dire savoir quand la fonction est positive ou négative.

Définition

Soit f une fonction polynôme, on appelle ____________________ de f toute valeurs α telle que $f(\alpha) = 0$.

Exemple : Soit f la fonction polynomiale de degré 2 donnée par $f : x \mapsto -x^2 + 5x - 4$.
Comme $f(1) = -1^2 + 5 \times 1 - 4 = 0$ et $f(4) = -4^2 + 5 \times 4 - 4 = 0$,
alors 1 et 4 sont des racines de f.

Exercice n° 4 : Déterminer les racines de chacune des fonctions polynomiales de degré 2 suivantes

1. $C : x \mapsto 2x^2$
2. $f : x \mapsto -3(x-1)(x-4)$
3. $g : x \mapsto 2(x+1)(x-2)$
4. $h : x \mapsto (x+2)(x+50)$
5. $D : x \mapsto 3x^2 - 108$
6. $A : x \mapsto 4x^2 - 100x$

Propriétés: Tableau de signe

★ Un polynôme de degré 2, de forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ possède

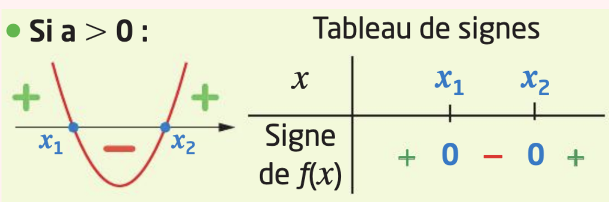
_______________________ éventuellement confondues qui sont _____________________

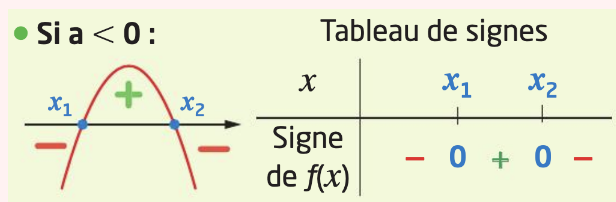
Autrement dit, x_1 et x_1 sont _________________________ de l'équation $f(x) = 0$.

★ On obtient le **signe du polynôme** à l'aide

— du **signe du coefficient** a,

— et la **position de la parabole** par rapport à l'axe des abscisses.





A RETENIR !

Le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines
et du signe contraire de a à l'intérieur des racines

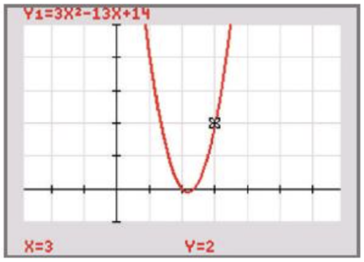
Exercice n° 5 : Soit $f(x) = x^2 - 4x$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f(0)$ et $f(4)$.
2. En déduire une factorisation de f
3. Déterminer alors l'abscisse du sommet de $\mathcal{C}_f$ et son allure.
4. Dresser alors le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 6 : Soit $f(x) = x^2 - 9x$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f(0)$ et $f(9)$.
2. En déduire une factorisation de f
3. Déterminer alors l'abscisse du sommet de $\mathcal{C}_f$ et son allure.
4. Dresser alors le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 7 : Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 13x + 14$ la fonction dont la courbe est représentée par le graphe suivant



1. Représenter la courbe sur la calculatrice.
2. Conjecturer une racine de f et vérifier la conjecture.
3. En déduire une factorisation de $f(x)$.
4. Déterminer alors la seconde racine.

Exercice corrigé : Étudier la fonction polynomiale réelle suivante $f(x) = -0,5(x-1)(x-7)$

<u>**Méthode**</u> : Pour déterminer les éléments caractéristiques d'une fonction polynomiale de degré 2, il faut
- Étape 1 : Donner le nom de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$ et son allure.
- Étape 2 : Déterminer les racines de f.
- Étape 3 : Déterminer l'abscisse et l'ordonnée du sommet de la courbe $\mathcal{C}$.
- Étape 4 : Étudier le signe de $f(x)$ dans un tableau de signes, ou à l'aide de l'allure de la parabole et des intersections avec l'axe des abscisses.

Réponse : Sa courbe est une parabole tournée vers le bas car $-0,5 < 0$, elle traverse l'axe des abscisses en 1 et en 7. Ainsi les racines de f sont 1 et 7.
L'abscisse du sommet de la courbe se trouve en $x_s = \dfrac{1+7}{2} = 4$ et l'ordonnée du sommet est

$$f(4) = -0,5(4-1)(4-7) = 4,5$$

Le tableau de signe de f est le suivant :

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice n° 8 : Étudier la fonction polynomiale f dans chacun des cas suivants,

1. $f : x \mapsto 3(x-1)(x+1)$
2. $f : x \mapsto -4(x+5)(x-2)$
3. $f : x \mapsto -(x+1)(x+3)$
4. $f : x \mapsto 2x(x+2)$
5. $f : x \mapsto -10(x+1)^2$
6. $f : x \mapsto 7(x-2)x$

4/ Résolution d'équation du type $x^2 = b$

Propriétés

On considère l'équation du second degré : $x^2 = b \quad (E)$ où b est un réels quelconque.

Alors,
★ Si $b < 0$, alors l'équation (E) n'admet pas de solutions réelles.
★ Si $b = 0$, alors l'équation (E) admet une seule solution qui est $x = 0$.
★ Si $b > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions qui sont $x = -\sqrt{b}$ et $x = \sqrt{b}$

Exercice nº 9 : Résoudre les équations suivantes

1. $x^2 = 36$
2. $x^2 = 289$
3. $x^2 + 4 = 445$
4. $x^2 - 9 = 178$
5. $(x-1)^2 = 49$
6. $(x+5)^2 = 64$
7. $2x^2 + 5 = 1063$
8. $6x^2 - 10 = 854$

Exercice nº 10 : Le coût de production de q tonnes de tomates est donné pour $q \in [0;30]$ par :

$$C(q) = \frac{1}{3}q^2 + 48$$

Le coût de production est en centaines d'euros

1. (a) Calculer $C(12)$. Interpréter le résultat.
   (b) Résoudre l'équation $C(q) = 240$. Interpréter le résultat.
2. Déterminer l'allure de la courbe et donner le tableau de variation de C sur $[0;30]$.
3. Au-delà d'un coût de 20 000 €, le producteur estime que ce n'est pas rentable et cesse sa production. Déterminer la quantité à ne pas dépasser, arrondie à 10 kg

---

Exercice nº 11 : On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0;10]$ par

$$f(x) = 0,5x^2 + 10 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 5x + 2$$

1. (a) Visualiser les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de ces deux fonctions sur l'écran d'une calculatrice. Indiquer leur sens de variation.
   (b) Conjecturer les abscisses des points d'intersections de ces deux courbes. Vérifier par un calcul.
2. Soit $h(x) = f(x) - g(x)$.
   (a) D'après la question 1.(b), déterminer une factorisation de la fonction h.
   (b) Étudier le signe de h sur $[0;10]$.
   (c) En vous aidant de la question précédente, donner une interprétation graphique concernant la position de la fonction f par rapport à g