Chap. 1 : Équations de droite et tangentes

Objectifs

- Reconnaître le coefficient directeur et savoir le calculer
- Interpréter le taux de variation comme pente de la sécante à la courbe passant par deux points distincts.
- Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.
- Construire la tangente à une courbe en un point.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.

1/ Rappels

Le plan usuel est rapporté à un repère orthonormé.

Définition

On appelle **équation réduite** d'une droite (D), toute équation de la forme

$$y = mx + p$$

où m et p sont des nombres réels donnés.

Exemples : • $y = 3x + 2$ • $y = 5x + 18$ • $y = x + 4$ • $y = x$

Propriétés

Toute droite (D) sécante à l'axe des ordonnées **admet** une équation réduite **unique**.

Propriétés

On considère une droite (D) sécante à l'axe des ordonnées d'équation réduite $y = mx + p$.

Alors le nombre m s'appelle le **coefficient directeur** de (D) et p s'appelle **l'ordonnée à l'origine** de (D).

Remarque : L'ordonnée à l'origine d'une droite (D) est la valeur de la droite au point d'abscisse 0.

Exemples :

— Pour la droite (D) d'équation réduite $y = 3x + 2$, le nombre 3 est le **coefficient directeur** de (D) et 2 est **l'ordonnée à l'origine**.

— Pour la droite (D) d'équation réduite $y = 5x + 18$, le nombre 5 est le **coefficient directeur** de (D) et 18 est **l'ordonnée à l'origine**.

— Pour la droite (D) d'équation réduite $y = x$, le nombre 1 est le **coefficient directeur** de (D) et 0 est **l'ordonnée à l'origine**.

Propriétés

Soient (D) une droite d'équation réduite $y = mx + p$ et $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ deux points distincts de (D).

Le **coefficient directeur** de la droite (D) est donné par $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exemple : Soit (D) la droite passant par $A(2; 1)$ et $B(3; 7)$. Alors le coefficient directeur de (D) est

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-1}{3-2} = \frac{6}{1} = 6$$

Donc l'équation s'écrit $y = 6x + p$. Et comme la droite passe par A, elle vérifie

$$1 = 6 \times 2 + p \qquad \text{donc} \qquad p = 1 - 12 = -11$$

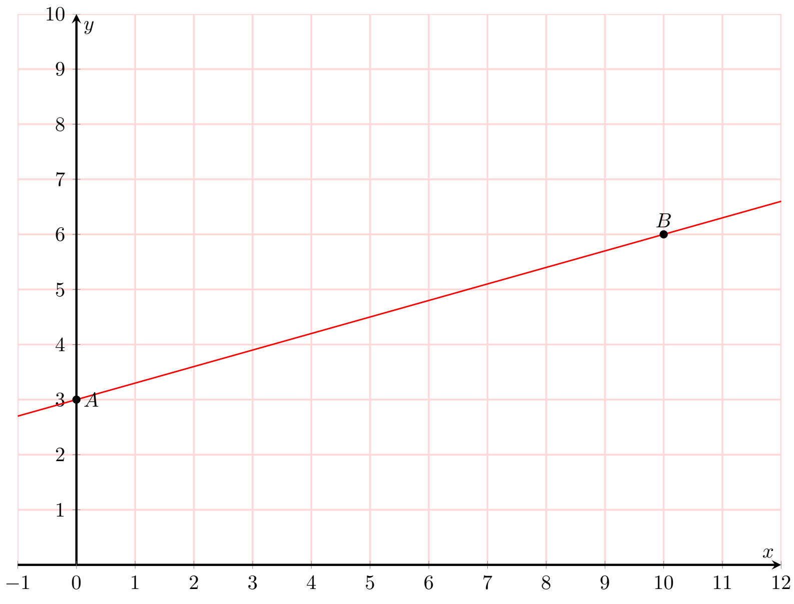
Finalement l'équation de (D) est $y = 6x - 11$.

Exercice nº 1. : Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

1. $A(-3; 2)$ et $B(0; 1)$
2. $A(0; 0)$ et $B(13; -1)$
3. $A(-1; -1)$ et $B(-4; -4)$
4. $A(-2; -4)$ et $B(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$

Exercice nº 2.

1. Donner les coordonnées des points A et B.
2. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
3. En déduire une équation réduite de la droite (AB).
4. En utilisant le résultat de la question 2., exprimer le coefficient directeur de la droite (AB) sous forme de pourcentage.
5. Si l'on choisit comme unité le mètre, expliquer à l'aide d'une phrase comment interpréter ce résultat.

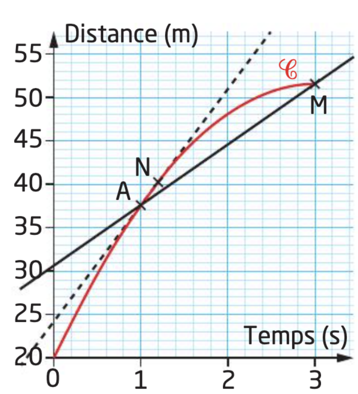


Exercice nº 3. :

Un véhicule roule à 75km par heure, soit environ 21m par seconde. La distance parcourue (réaction + freinage) est donnée par la formule

$$d(t) = -3,5t^2 + 21t + 20$$

et est représentée par la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre, où t désigne le temps de freinage en secondes et $d(t)$ la distance parcourue en mètres.



1. (a) Calculer le quotient $v = \dfrac{d(3) - d(1)}{3 - 1}$, appelé **vitesse moyenne** du véhicule entre 1 et 3 s.
   (b) Le point A, d'abscisse 1, et le point M, d'abscisse 3, sont deux points de la courbe $\mathcal{C}$.
   La droite (AM) est représentée sur le graphique.
   Calculer son coefficient directeur et faire le lien avec la question 1.(a).

2. (a) Calculer la **vitesse moyenne** du véhicule entre 1s et $1,2$s.
   (b) En déduire le coefficient directeur de la droite (AN) où N est le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse $1,2$.

3. Comment choisir N pour que la **vitesse** moyenne s'approche un peu plus de V_{ins}, la vitesse instantanée, au bout de 1 seconde ? Vers quelle droite semble s'approcher la droite (AN) ?

On dit que V_{ins} est le **nombre dérivé** de la fonction d en 1. On note $V_{ins} = d'(1)$.

2/ Nombre dérivé et tangentes

On considère une fonction réelle f définie sur un intervalle réel I ainsi que deux nombres a et b dans I.

Définition

Pour tous nombres réels a et b distincts, on appelle ______________________________ de f entre a et b le quotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Définition

Si le taux de variation de f entre a et b tend vers un **nombre** lorsque b tend vers a, **alors** ce nombre est appelé ____________________________ de f en a et se note $f'(a)$.

Autrement dit, on a $\lim\limits_{b \to a} \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a)$. En posant $b - a = h$, on a aussi $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Définition

Graphiquement, lorsque h tend vers zéro, le point B se rapproche du point A et la droite (AB) tend vers la droite T appelée _______________________________________ au point A.

Le nombre $f'(a)$ est le _____________________________________ de la __________________ T à la courbe représentative de f au point A d'abscisse a.

Exercice n° 4. : Calculer le nombre dérivé en a pour chacune des fonctions réelles suivantes.

1. $f(x) = x^2$ en $a = 3$
2. $f(x) = x^2$ en $a = 7$
3. $f(x) = 3x^2$ en $a = 4$
4. $f(x) = 5x + 1$ en $a = 3$
5. $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ en $a = 1$
6. $f(x) = x^2 + 6x + 2$ en $a = 2$

Définition

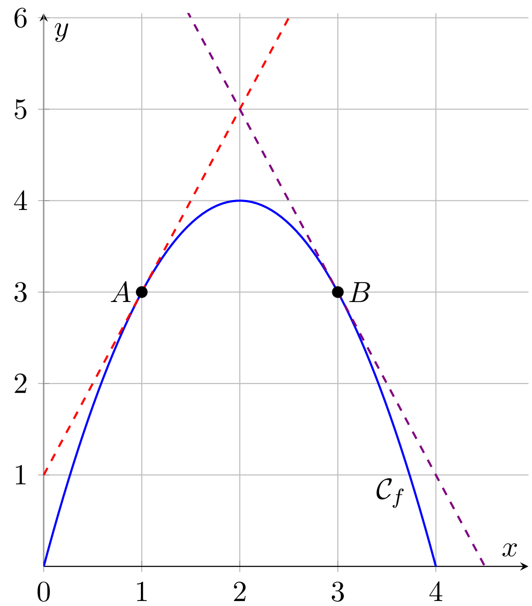
Une fonction f est ___________________________ sur un intervalle I, lorsque pour tout réel x de I, le nombre dérivé $f'(x)$ existe.

Propriétés

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie et **dérivable** sur un intervalle I.

L' équation réduite de la **tangente** en $a \in I$ de la fonction f est donnée par :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

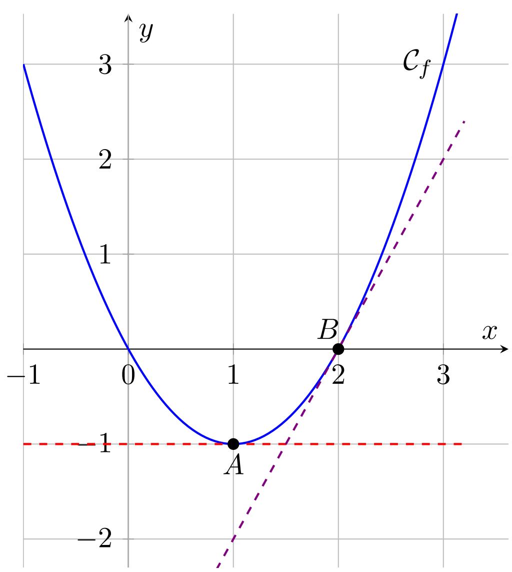


Exercice n° 5. :

Soit f la fonction réelle dont le graphe $\mathcal{C}_f$ est représenté sur la figure ci-contre.

La tangente T_A à $\mathcal{C}_f$ au point A est représentée en pointillée de même pour la tangente T_B au point B.

1. Déterminer graphiquement $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$.
2. On rappelle que $f'(1)$ correspond au coefficient directeur de la tangente T_A.
Déterminer graphiquement la valeur de $f'(1)$.
3. Déterminer graphiquement la valeur de $f'(3)$.
4. En déduire les équations réduites de T_A et T_B.



Exercice n° 6. :

Soit f la fonction réelle dont le graphe $\mathcal{C}_f$ est représenté sur la figure ci-contre.

La tangente T_A à $\mathcal{C}_f$ au point A est représentée en pointillée de même pour la tangente T_B au point B.

1. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
2. On rappelle que $f'(1)$ correspond au coefficient directeur de la tangente T_A.
Déterminer graphiquement la valeur de $f'(1)$.
3. Déterminer graphiquement la valeur de $f'(2)$.
4. En déduire les équations réduites de T_A et T_B.