Chap. 2 : Généralités sur les fonctions

1/ Les fonctions comme modèle d'évolution continue

1/.1 Activité d'introduction

Un industriel guyanais produit et vend des engrais bio. Chaque mois, il vend entre 1 000L et 7 000L.

Il a relevé quelques valeurs de son bénéfice suivant la quantité d'engrais vendus.

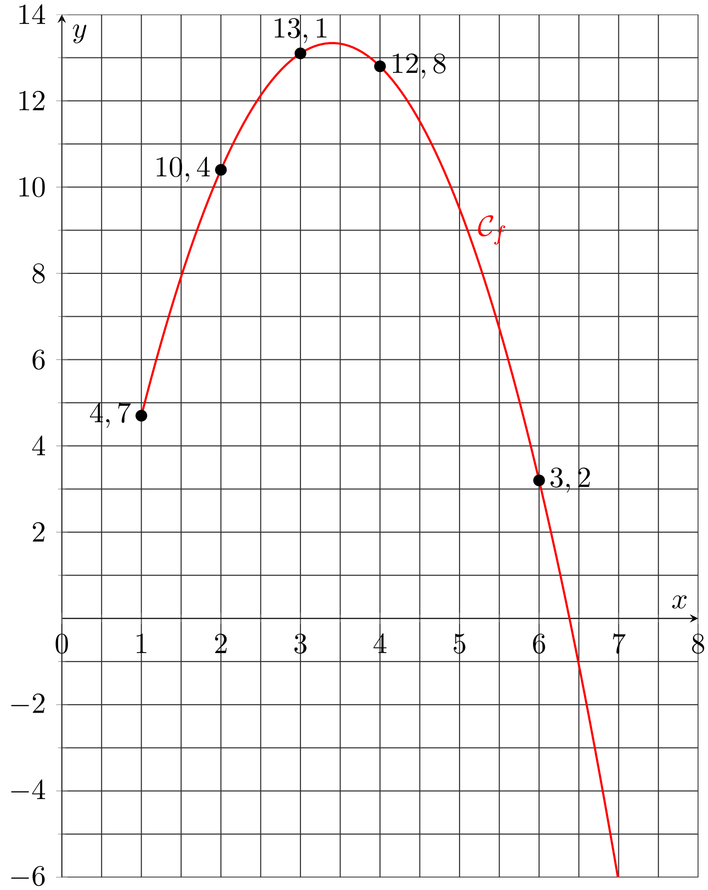
Les quantités d'engrais (axe horizontal) sont en milliers de litres et le bénéfice (axe vertical) en milliers d'euros.

À l'aide d'un logiciel, on approche les points par une courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction $f(x) = -1.5x^2 + 10.2x - 4$.

1. Vérifier que les points placés appartiennent bien à la courbe $\mathcal{C}$.

2. Calculer le bénéfice si on vend 4 500L d'engrais.

3. Expliquer comment obtenir la quantité à vendre qui engendre un bénéfice nul.



2/ Expression littérale et représentation graphique

Définition: (A retenir !)

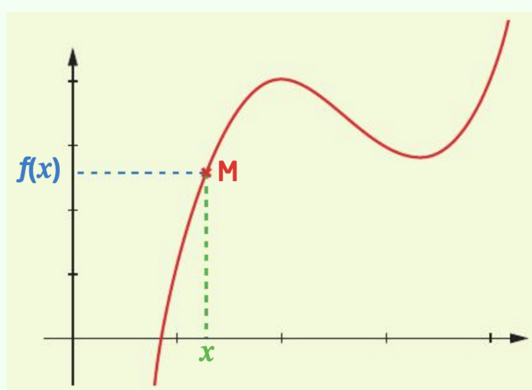
- Une fonction réelle f est représentée par son

  _ $f(x)$:

  à toute valeur réelle x est associé le nombre réel $f(x)$.

  On alors note $x \mapsto f(x)$, où x parcourt **l'ensemble de définition** D_f de la fonction f.

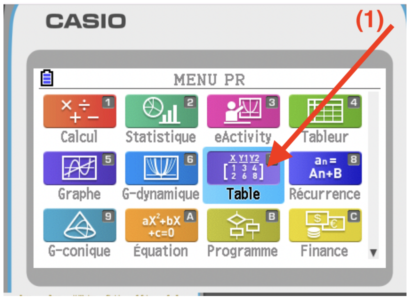
- Une fonction f est **représentée graphiquement** dans un repère par _ $y = f(x)$, c.à.d par l'ensemble des points $M(x; f(x))$, avec $x \in D_f$.

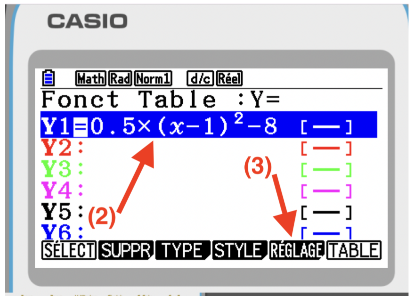


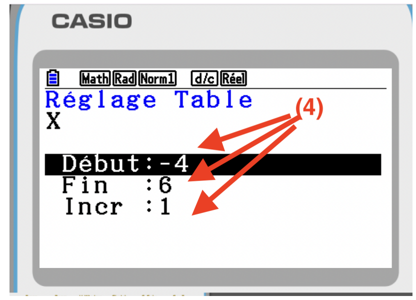
Exemple : (Calculer des valeurs et représenter une fonction sur calculatrice.)

Soit f la fonction réelle donnée par son expression littérale $f(x) = 0,5(x-1)^2 - 8$ sur l'intervalle $[-4;6]$.

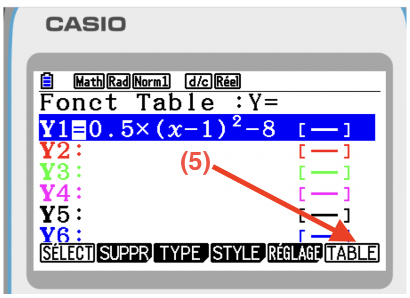
- Pour obtenir le tableau de valeurs ainsi que la courbe de cette fonction sur la calculatrice, suivez les étapes (1)-(2)-(3)-(4)-(5)-(6) ci dessous :

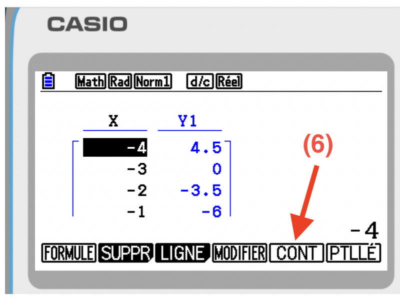


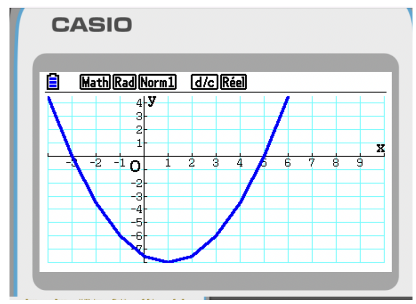




- Une fois arrivé à l'étape (4) et après avoir bien configuré les valeurs de départ et de fin, appuyez sur "EXIT" puis suivez les étapes (5)-(6) ci-dessous







- Si la courbe n'est pas bien visible, appuyez sur le bouton "ZOOM" (F2) puis sélectionnez "AUTO".
- Sur l'avant dernière image, le tableau donne les valeurs de la fonction f pour différentes valeurs de x.
  Par exemple, on a $f(-4) = 4,5,\ f(-3) = 0$ et $f(-1) = -6$.

3/ Exercices

Exercice nº 1. : On donne la fonction $f : x \mapsto 2x - 3 + \dfrac{1}{x}$. Calculer à la main $f(-1)$, $f(2)$ et $f(10)$.

Exercice nº 2. : On donne la fonction $f : x \mapsto x^3 - 10x^2$. Calculer à la main $f(2)$, $f(-3)$ et $f(10)$.

Exercice nº 3. : Soit f la fonction réelle dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée dans le repère suivant

(1). Déterminer graphiquement :

$f(0) = \dots\dots\dots$

$f(1) = \dots\dots\dots$

$f(2) = \dots\dots\dots$

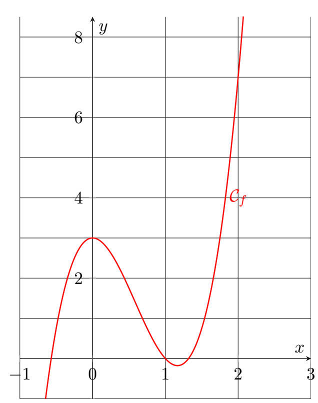
(2). Combien il y a-t-il de valeurs k telles que

$f(k) = 1$

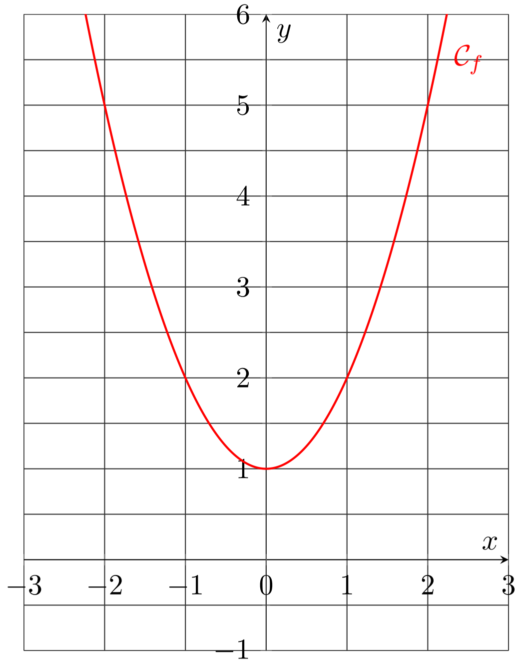
$f(k) = 2$

$f(k) = 3$

$f(k) = 0$



Exercice n° 4. : Soit f la fonction réelle dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée dans le repère suivant



(1). Déterminer graphiquement :

$f(0) = \dots\dots\dots$

$f(1) = \dots\dots\dots$

$f(2) = \dots\dots\dots$

(2). Résoudre graphiquement

$f(x) < 2$ Réponse :

$f(x) \leq 5$ Réponse :

$f(x) \geq 2$ Réponse :

$f(x) > 5$ Réponse :

4/ Croissance, décroissance et monotonie d'une fonction

Définition: (Fonction croissante)

Une fonction réelle f est ____________________________ sur un intervalle réel I lorsque pour tout nombre a et b de I,

$$\text{si } a < b \quad \text{alors} \quad f(a) \leq f(b)$$

On dit que f est ______________________________________ sur un intervalle réel I lorsque pour tout nombre a et b de I,

$$\text{si } a < b \quad \text{alors} \quad f(a) < f(b)$$

Définition: (Fonction décroissante)

Une fonction f est __________________________ sur un intervalle réel I lorsque pour tout nombre a et b de I,

$$\text{si } a < b \quad \text{alors} \quad f(a) \geq f(b)$$

On dit que f est ____ sur un intervalle réel I lorsque pour tout nombre a et b de I,

$$\text{si } a < b \quad \text{alors} \quad f(a) > f(b)$$

Définition: (Fonction constante)

Une fonction f est _________________ sur un intervalle réel I lorsque pour tout nombre a et b de I,

$$f(a) = f(b)$$

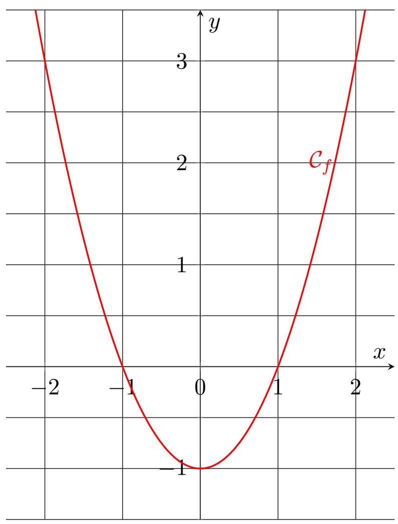
Définition

Une fonction f est dite _________________ sur un intervalle I si elle est **croissante ou décroissante.**

Une fonction réelle f est dite _____________________________ sur un intervalle I si elle est **strictement croissante ou strictement décroissante.**

Remarque : Afin de décrire la monotonie d'une fonction, on utilise souvent un **tableau de variations**.

Exemple : Soit $f : x \mapsto x^2 - 1$ représentée par la courbe ci-contre



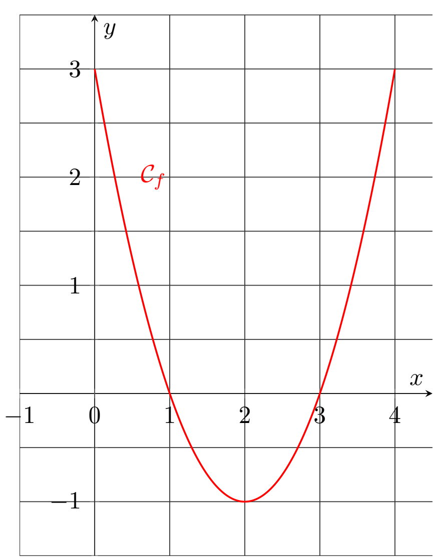
Graphiquement, on observe que sur $[-2; 2]$, on a

- f est décroissante sur $[-2; 0]$,
- f est croissante sur $[0; 2]$,
- $f(-2) = 3$, $f(0) = -1$ et $f(2) = 3$.

En mettant ces informations dans un tableau de variations, on obtient :

x	-2	0	2
$f(x)$	3 ↘	-1	↗ 3

Exercice n° 5. Soit f la fonction réelle représentée par la courbe ci-contre



Compléter le tableau de variations de f sur $[0; 4]$:

x	0	2	4
$f(x)$			

5/ Tableau de signes d'une fonction

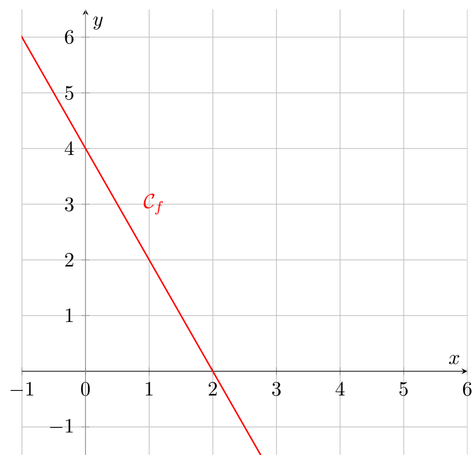
Définition

On dit qu'une fonction f est __________________ sur un ensemble $\mathcal{D}$ si pour tout valeur x de $\mathcal{D}$, on a ______________ .

On dit qu'une fonction f est ___________________ sur un ensemble $\mathcal{D}$ si pour tout valeur x de $\mathcal{D}$, on a ______________________.

Remarque : On place souvent ces informations dans un **tableau de signes**. On peut conjecturer le signe d'une fonction en étudiant la position de sa courbe représentative par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple : Soit f la fonction réelle dont la courbe représentative est donnée par



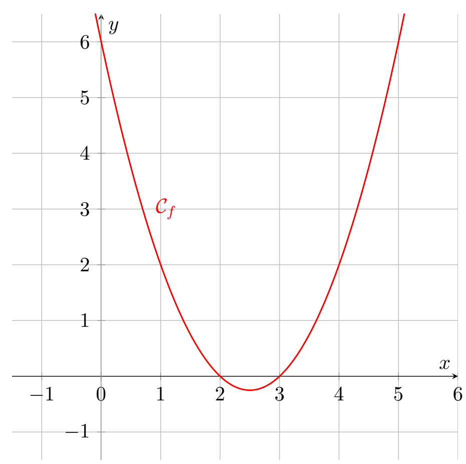
On observe graphiquement ici que la fonction f est

- positive sur l'intervalle $[-1;2]$,
- négative sur l'intervalle $[2;3]$.

De plus, par lecture graphique, on a $f(2) = 0$. Ainsi, on en déduit la tableau de signe de f suivant

x	-1		2		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice n° 6. Soit f la fonction réelle dont la courbe représentative est donnée par



1. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
2. Quel est le signe de f sur $[0;2]$?
3. Déterminer graphiquement $f(3)$ et déterminer le signe de f sur $[2,3]$.
4. Déterminer graphiquement $f(4)$ et $f(5)$ puis en déduire le signe de f sur $[3,5]$.

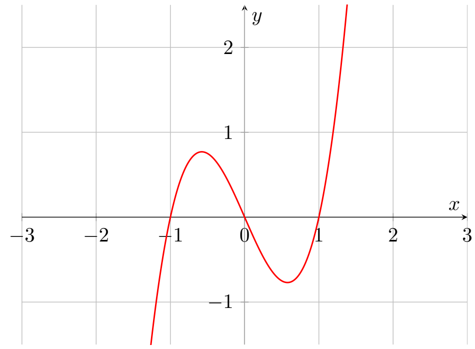
5 Compléter le **tableau de signe** de f sur $[0,6]$ suivant

x	0	2	3	6
$f(x)$				

Exercice nº 7. Soit f la fonction réelle dont la courbe représentative est donnée par la figure ci-contre.

Compléter le tableau de signe de la fonction f sur $[-2;3]$

x	-2 $\qquad -1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad 2$
$f(x)$	



Activité : On étudie l'offre et la demande de ramboutan sur un marché en gros. Le prix x varie entre 2 et 8 euros le kg. Les quantités offertes $f(x)$ et les quantités demandées $g(x)$, en tonnes, sont modélisées suivant le prix x par

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 15 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x^2 + 4x + 80$$

1. (a) Visualisez la fonction d'offre f sur l'écran d'une calculatrice, sur l'intervalle $[2;8]$.
   (b) Déterminez $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$ à l'aide du tableur de la calculatrice. Interprétez ces résultats.
   (c) Quel semble être le sens de variation de f ? (croissante ? décroissante ?)
   (d) Reprendre les questions 1.(a), 1.(b) et 1.(c) avec la fonction g.

2. Sur le marché de Supéco à Cayenne, le prix des ramboutans est fixé à 4€ le kg.
   (a) Calculez $f(5) - f(4)$ et compléter la phrase suivante :
   Si le prix augmente de 1€ par kg, l'offre varie de ________________
   Calculez $g(5) - g(4)$ et compléter la phrase suivante :
   Si le prix augmente de 1€ par kg, la demande varie de ________________
   (b) Calculez le quotient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(4,5) - f(4)}{4,5 - 4}$ et complétez la phrase suivante
   Si le prix augmente de 0.5€ par kg, l'offre varie en moyenne de ________________