

# Chap. 2 : Suites arithmétiques et géométriques

## Objectifs

- Suite arithmétique/géométrique et expression en fonction de  $n$
- Somme des  $n$  premiers termes d'une suite
- Notation  $\sum$
- Moyenne arithmétique de 2 nombres
- Moyenne géométrique de deux nombres positifs

## 1/ Rappels

On retrouve les **suites numériques** dans de nombreux domaines :

- **Financier** : avec le calcul des mensualités dues à un crédit, des intérêts liés à un placement, l'évolution de la valeur d'un bien ou d'une action ;
- **Scientifique** : avec l'étude d'évolution de population, de la désintégration de substances radioactives, modélisation de phénomènes etc.

## 2/ Définition d'une suite arithmétique

### Définition

Une **suite numérique** est une ..... qui, à tout **entier naturel**  $n$  ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ), associe un nombre réel **noté**  $u(n)$  ou  $u_n$ . On parle du terme de .....  $n$  de la suite.

Ainsi une suite est ..... : On la note  $u$  ou  $(u_n)$ .

### Définition: (A retenir !)

Lorsque l'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre réel**  $a$ , on dit que la suite est .....

Une suite arithmétique de raison  $a$  est définie par la **relation de récurrence** :

$$u(n+1) = u(n) + a \quad \text{et le terme initial}$$

On écrit aussi

$$u_{n+1} = u_n + a$$

Le terme initial peut être  $u(0)$  de rang 0 ou  $u(1)$  de rang 1. Une suite arithmétique est **représentée par des points alignés**. On parle de .....

**Exemple** :  $u_{n+1} = u_n + 3$  et  $u_0 = 100$ . Cette suite est arithmétique de raison 3 et de premier terme  $u_0 = 100$ .

**Exercice n° 1.** : Calculer les 10 premiers termes des suites suivantes :

1.  $u_{n+1} = u_n + 2$  et  $u_0 = 4$

2.  $u_{n+1} = u_n + 5$  et  $u_0 = 1$

3.  $u_{n+1} = u_n - 1$  et  $u_0 = 20$

4.  $u_{n+1} = u_n - 13$  et  $u_0 = 0$

5.  $u_{n+1} = u_n$  et  $u_0 = 4$

6.  $u_{n+1} = u_n - 100$  et  $u_0 = 1000$

Exercice n° 2. : La suite  $u$  est arithmétique de raison 10 et de terme initial  $u_0 = 0$ . Calculer  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ .

3/ Propriétés d’une suite arithmétique

Théorème: (Sens de variation d’une suite arithmétique de raison  $a$ )

Soit  $u$  une suite arithmétique de raison  $a$ , c’est à dire de la forme

$$u_{n+1} = u_n + a \quad \text{et le terme initial}$$

- Si  $a > 0$  alors la suite arithmétique  $u$  est .....
- Si  $a < 0$  alors la suite arithmétique  $u$  est .....
- Si  $a = 0$  alors la suite arithmétique  $u$  est .....

Exercice n° 3. : On désire calculer les termes de n’importe quelle suite arithmétique de raison  $a$  et de terme initial  $u_0$  à l’aide d’un tableur.

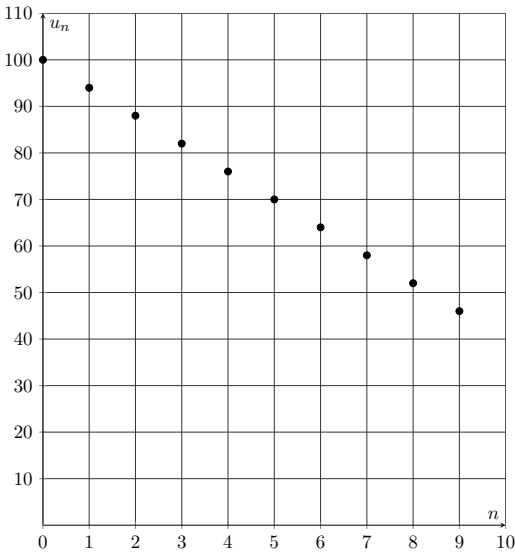
1. Lucas propose le tableur ci-contre pour la suite arithmétique de raison  $-6$ , et de terme initial 100

|   | A | B             | C      |
|---|---|---------------|--------|
| 1 | n | Un            | raison |
| 2 | 0 | = 100         | = -6   |
| 3 | 1 | = B2 + \$C\$2 |        |
| 4 | 2 | = .....       |        |
| 5 | 3 | = .....       |        |
| 6 | 4 | = .....       |        |
| 7 | 5 | = .....       |        |

(a) Que permet le symbole \$ dans la formule saisie en B3 ? Que devient la formule en B4 par recopie vers le bas ? Quel sera le résultat obtenu en B7 ?

2. Cette suite est représentée ci-après.

- (a) Quel est son sens de variation ? Pourquoi parle-t-on de croissance **linéaire** ?
- (b) Déterminer l’équation réduite de la droite passant par ses points.



**Activité n° 1.** Pour s'acheter un scooter électrique à 850 €, Wendy a une somme initiale de 50 € et économise chaque semaine les 40€ qu'elle gagne en donnant des cours de mathématiques.

On appelle  $(u_n)$  le montant (en €) économisé la  $n$ -ième semaine et on note  $u_0 = 50$ .

1. Donner l'expression de  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
2. Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .
3. Déterminer la nature de la suite (croissante ? décroissante) ?.
4. On cherche un lien entre  $n$  et  $u_n$  afin de calculer rapidement tous les termes jusqu'à obtenir 850.
  - (a) Conjecturer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$
  - (b) Selon cette formule, au bout de combien de semaine Wendy pourra-t-elle acheter son scooter électrique ?

### Propriétés: (A retenir)

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

- i) Si le premier terme de la suite est  $u_0 \in \mathbb{R}$  alors pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$u_n = u_0 + nr$$

- ii) Si le premier terme de la suite est  $u_1 \in \mathbb{R}$  alors pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

**Exercice n° 4.** : Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = u_n + 2$ .

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Déterminer alors  $u_{50}$  et  $u_{65}$ .

**Exercice n° 5.** : Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_1 = 10$  et  $u_{n+1} = u_n - 6$ .

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Déterminer alors  $u_{30}$  et  $u_{101}$ .

**Activité n° 2.** : On considère une suite arithmétique  $(u_n)$  de raison inconnue mais dont on connaît quelques termes

|       |    |     |    |     |     |     |    |
|-------|----|-----|----|-----|-----|-----|----|
| $n$   | 10 | 11  | 12 | 13  | 14  | 15  | 16 |
| $u_n$ | 13 | ... | 18 | ... | ... | ... | 28 |

1. Déterminer la raison de cette suite puis compléter le tableau.
2. Plus généralement, si on connaît  $u_n$  et  $u_{n+2}$ , que vaut la raison  $r$  ? En déduire que  $u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$ .

### Propriétés

Trois nombres  $x, y$  et  $z$  sont des termes ..... d'une suite

..... si la moyenne arithmétique du plus petit et du plus grand est égale au

..... Autrement dit

$$y = \frac{x + z}{2}$$

**Activité n° 3.** : On veut exprimer simplement la somme des  $n$  premiers entiers naturels

$$S_n = \sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$$

1. Compléter le tableau suivant



|                    |   |     |   |       |   |       |   |     |       |   |       |   |     |
|--------------------|---|-----|---|-------|---|-------|---|-----|-------|---|-------|---|-----|
| $S_n$              | = | 0   | + | 1     | + | 2     | + | ... | $n-2$ | + | $n-1$ | + | $n$ |
| $S_n$              | = | $n$ | + | $n-1$ | + | $n-2$ | + | ... | 2     | + | 1     | + | 0   |
| $S_n + S_n = 2S_n$ | = | ... | + | ...   | + | ...   | + | ... | ...   | + | ...   | + | ... |

2. En déduire l'expression de  $2S_n$  en fonction de  $n$  puis celle de  $S_n$  en fonction de  $n$ .

### Propriétés: (Calcul d'une somme de termes d'une suite arithmétique)

Pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$\sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Et si  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$ , on a

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$$

Plus simplement, la formule générale à retenir est

$$\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \times (\text{nombre de terme})$$

**Exercice n° 6.** : On considère la suite arithmétique  $(u_n)$  telle que  $u_0 = 5$  et  $u_{14} = 39$

1. Déterminer le nombre de termes entre  $u_0$  et  $u_{14}$ .

2. Calculer  $S = \sum_{i=0}^{14} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_{14}$

**Exercice n° 7.** : Chaque somme  $S$  est la somme de termes successifs d'une suite arithmétique  $(u_n)$ .

Calculer  $S$  dans chacun des cas suivants

a.  $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 202$

b.  $S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 202$

c.  $S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 201$

**Exercice n° 8.** : Vrai ou Faux. Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. La moyenne arithmétique de  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{3}$  est égale à  $\frac{1}{4}$

2. le terme générale d'une suite arithmétique  $(u_n)$  de raison 5 et de premier terme  $u_0 = -3$  est  $u_n = 5 - 3n$ .

3. Une suite arithmétique  $(v_n)$  de raison  $-3$  et de premier terme  $v_0 = \frac{1}{3}$  a pour terme général  $v_n = \frac{1}{3}n - 3$ .

4. Si  $(w_n)$  est une suite arithmétique de raison  $-2$  et de premier terme  $w_0 = 7$  alors  $w_{10} = -13$ .

## 4/ Définition d'une suite géométrique

### Définition: (A retenir!)

Lorsque l'on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par le même nombre réel  $q$** , on dit que la suite est

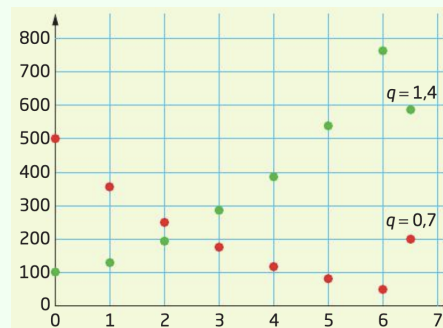
Une suite géométrique de raison  $a$  est définie par la **relation de récurrence** :

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{et le terme initial}$$

Le terme initial peut être  $u_0$  de rang 0 ou  $u_1$  de rang 1.

Une suite géométrique modélise une grandeur ayant un taux d'évolution constant.

On parle de .....



**Exemple :** Une suite  $u$  est définie par  $u_{n+1} = 5u_n$  et  $u_0 = 6$ .

Cette suite est géométrique de raison 5, car la relation de récurrence est de la forme  $u_{n+1} = q \times u_n$  avec  $q = 5$ .

**Exercice n° 9.** Calculer les 10 premiers termes des suites suivantes :

1.  $u_{n+1} = 2u_n$  et  $u_0 = 4$

2.  $u_{n+1} = 6u_n$  et  $u_0 = 1$

3.  $u_{n+1} = -3u_n$  et  $u_0 = 20$

4.  $u_{n+1} = 9u_n$  et  $u_0 = 0$

5.  $u_{n+1} = u_n$  et  $u_0 = 4$

6.  $u_{n+1} = -4u_n$  et  $u_0 = -1$

**Exercice n° 10. :** La suite  $u$  est la suite géométrique de raison 10 et de terme initial  $u_0 = 2$ .

Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .

## 5/ Propriétés d'une suite géométrique

### Théorème: (Sens de variation d'une suite géométrique de raison $q$ )

Soit  $u$  une suite géométrique de raison  $q$ , c'est à dire de la forme

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{et le terme initial}$$

- Si  $q > 1$  alors la suite géométrique  $u$  est .....
- Si  $0 < q < 1$  alors la suite géométrique  $u$  est .....

**Activité n° 4.** La soeur d'Anglise vient d'avoir un enfant. Afin de l'aider financièrement lorsqu'elle sera plus grande, Anglise dépose une somme initiale de 2000 € le compte en banque de sa nièce. Chaque année, la banque applique une gratification de 4% du montant présent sur le compte.

On appelle  $(u_n)$  le montant (en €) placé à la banque la  $n$ -ième année et on note  $u_0 = 2000$ .

1. Donner l'expression de  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
2. Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .
3. Déterminer la nature de la suite (croissante ? décroissante) ?.
4. On cherche un lien entre  $n$  et  $u_n$  afin de calculer rapidement tous les termes jusqu'à dépasser 4000€.  
 (a) Conjecturer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$   
 (b) Selon cette formule, au bout de combien d'année la nièce d'Anglise possèdera plus de 4000€ sur son compte en banque

### Propriétés: (A retenir)

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$ .

— Si le premier terme de la suite est  $u_0 \in \mathbb{R}$  alors pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$u_n = u_0 \times q^n$$

— Si le premier terme de la suite est  $u_1 \in \mathbb{R}$  alors pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

**Exercice n° 11.** : Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = 2u_n$ .

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Déterminer alors  $u_{50}$  et  $u_{65}$ .

**Exercice n° 12.** : Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 10$  et  $u_{n+1} = 6u_n$ .

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Déterminer alors  $u_{30}$  et  $u_{101}$ .

**Activité n° 5.** : On considère une suite géométrique  $(u_n)$  strictement positive de raison inconnue mais dont on connaît quelques termes

|       |    |     |    |     |     |     |      |
|-------|----|-----|----|-----|-----|-----|------|
| $n$   | 10 | 11  | 12 | 13  | 14  | 15  | 16   |
| $u_n$ | 3  | ... | 27 | ... | ... | ... | 2187 |

1. Déterminer la raison de cette suite puis compléter le tableau.
2. Plus généralement, si on connaît  $u_n$  et  $u_{n+2}$ , que vaut la raison  $q$  ? En déduire que  $u_{n+1} = \sqrt{u_n \times u_{n+2}}$ .

### Propriétés

Trois nombres  $x, y$  et  $z$  sont des termes ..... d'une suite

..... si la moyenne géométrique du plus petit et du plus grand est égale au

..... Autrement dit

$$y = \sqrt{x \times z}$$

**Activité n° 6.** : On veut exprimer simplement la somme des  $n + 1$  premiers termes d'une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  et de premier terme  $u_0 = 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

1. Compléter le tableau suivant



|              |   |     |   |     |   |       |   |     |           |   |       |   |           |
|--------------|---|-----|---|-----|---|-------|---|-----|-----------|---|-------|---|-----------|
| $S_n$        | = | 1   | + | $q$ | + | $q^2$ | + | ... | $q^{n-1}$ | + | $q^n$ |   |           |
| $qS_n$       | = |     | + | $q$ | + | $q^2$ | + | ... | $q^{n-1}$ | + | $q^n$ | + | $q^{n+1}$ |
| $S_n - qS_n$ | = | ... | + | ... | + | ...   | + | ... | ...       | + | ...   | + | ...       |

2. En déduire une expression réduite de  $S_n - qS_n$  puis exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

**Propriétés: (Calcul d'une somme de termes d'une suite arithmétique)**

Pour tout entier naturel  $n$  et pour tout réel  $q \neq 1$ , on a

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Et si  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ , on a

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Plus simplement, la formule générale à retenir est

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

**Exercice n° 13.** : On considère la suite géométrique  $(u_n)$  telle que  $u_0 = 5$  et  $u_{20} = 39$

1. Déterminer le nombre de termes entre  $u_0$  et  $u_{20}$ .

2. Calculer  $S = \sum_{k=0}^{20} u_k = u_0 + u_8 + \cdots + u_{20}$

**Exercice n° 14.** : Chaque somme  $S$  est la somme de termes successifs d'une suite géométrique  $(u_n)$ .

Calculer  $S$  dans chacun des cas suivants

a.  $S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 256$

b.  $S = 1 + 5 + 25 + \cdots + 390625$

c.  $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{59049}$

**Exercice n° 15.** : Vrai ou Faux. Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. La moyenne géométrique de  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{8}$  est égale à  $\frac{1}{4}$

2. le terme générale d'une suite géométrique  $(u_n)$  de raison 3 et de premier terme  $u_0 = 10$  est  $u_n = 3 \times 10^n$ .

3. Une suite géométrique  $(v_n)$  de raison 7 et de premier terme  $v_0 = \frac{1}{3}$  a pour terme général  $v_n = \frac{1}{3} \times 7^n$ .

4. Si  $(w_n)$  est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme  $w_0 = 7$  alors  $w_5 = 224$ .