Chap. 1 : Suites numériques

Objectifs

- Différents modes de génération d'une suite numérique.
- Sens de variation.
- Représentation graphique par nuage de points $(n; u_n)$
- Calculer un terme à l'aide une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite.

1/ Introduction

Une suite est une liste , potentiellement infinie, de nombres, que l'on peut énumérer.
Par exemple 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; . . . est la liste des nombres entiers.

Compléter 5 termes des listes suivantes, vous indiquerez comment vous passez d'un terme au terme suivant :

— $1; 3; 5; 7; 9; 11;$ ....

— $0; 4; 8; 12; 16;$ ....

— $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16};$ ....

On retrouve les **suites numériques** dans de nombreux domaines :

— financier avec le calcul des mensualités dues à un crédit, des intérêts liés à un placement, l'évolution de la valeur d'un bien ou d'une action ;

— scientifique avec l'étude d'évolution de population, de la désintégration de substances radioactives, modélisation de phénomènes etc.

Savoir manipuler les suites permet de mieux **appréhender** notre monde et **d'anticiper** celui de demain.

2/ Définitions et différents modes de génération d'une suite numérique

Définition: (A retenir !)

Une **suite numérique** est une _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ qui, à tout **entier naturel** n $(n = 0, 1, 2 \dots)$, associe un nombre réel **noté** $u(n)$ ou u_n . On parle du terme de_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ n de la suite.

Ainsi une suite est _: elle se note u ou (u_n).

Mode de génération

Pour définir les termes d'une suite numérique, on peut :

★ donner le terme général _ en fonction de son **rang** n par une relation fonctionnelle.

Exemples : $u(n) = 2n + 1, \quad u(n) = \dfrac{n+5}{3n+1}, \quad u(n) = 3n^2$

★ donner le terme initial $u(0)$ ou $u(1)$ puis l'expression de $u(n + 1)$ en fonction du terme précédent $u(n)$ par une_ _.

Exemples : $u(0) = 3$ et $u(n + 1) = u(n) + 1, \qquad u(0) = 2$ et $u(n + 1) = 2 \times u(n)$

Exercice n° 1. : Dans chacun des cas suivants, préciser si la suite u est définie explicitement ou par récurrence. puis calculer $u(0), u(1), u(2)$ et $u(3)$.

1. Si $u(n) = 4n + 3$ alors la suite u est définie _________________________ et

   $u(0) = \dots\dots\dots\dots$
   $u(1) = \dots\dots\dots\dots$
   $u(2) = \dots\dots\dots\dots$
   $u(3) = \dots\dots\dots\dots$

2. Si $u(0) = 1$ et $u(n+1) = u(n) + 6$ alors la suite u est définie ____________________ et

   $u(0) = \dots\dots\dots\dots$
   $u(1) = \dots\dots\dots\dots$
   $u(2) = \dots\dots\dots\dots$
   $u(3) = \dots\dots\dots\dots$

3. Si $u(n) = \dfrac{7n+2}{2n+1}$ alors la suite u est définie ______________________________ et

   $u(0) = \dots\dots\dots\dots$
   $u(1) = \dots\dots\dots\dots$
   $u(2) = \dots\dots\dots\dots$
   $u(3) = \dots\dots\dots\dots$

4. Si $u(0) = 3$ et $u(n+1) = 3u(n) - 2$ alors la suite u est définie ____________________ et

   $u(0) = \dots\dots\dots\dots$
   $u(1) = \dots\dots\dots\dots$
   $u(2) = \dots\dots\dots\dots$
   $u(3) = \dots\dots\dots\dots$

3/ Utilisation d'un tableur ou d'un programme

Afin de calculer rapidement les valeurs des différents termes d'une suite u, on peut faire appel à un tableur.

Cas formule explicite

$$u_n = 3n + 2$$

	A	B
1	n	Un
2	0	= 3*A2 + 2
3	1	= 3*A3 + 2
4	2	= 3*A4 + 2
5	3	= 3*A5 + 2

Programme Python

```python
def u(n):
    return 3*n+2

for i in range(4):
    print(u(i))
```

Cas formule donnée par récurrence

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1$$

	A	B
1	n	Un
2	0	= 1
3	1	= 2*B2 +1
4	2	= 2*B3 + 1
5	3	= 2*B4 + 1

Programme Python

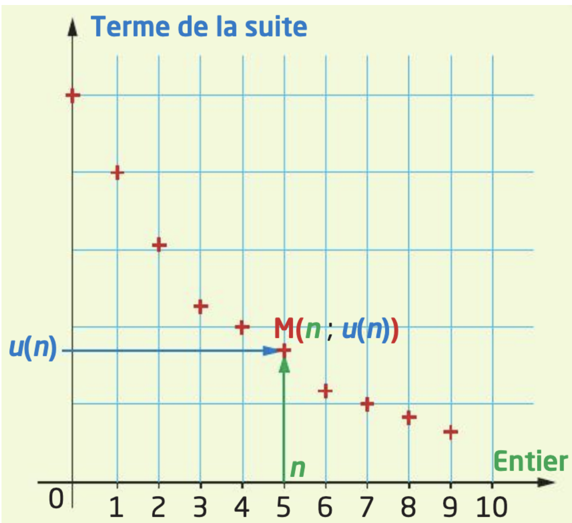
```python
u=1

for i in range(4):
    u=2*u+1
    print(u)
```

4/ Représentation graphique d'une suite numérique et sens de variation

Propriétés

Une suite numérique u est représentée par un ____________________ $M(n; u(n))$. Les ________________ des points sont les nombres entiers n, à partir de $n = 0$ ou $n = 1$, et les________________ sont les termes $u(n)$ de la suite.



Représentation graphique

Exercice n° 2. Représenter dans un repère orthonormé les 5 premiers termes des suites suivantes :

1. $u_n = 4n + 3$
2. $u_n = \dfrac{4n+3}{2n+1}$
3. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = -2u_n + 1$
4. $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - n^2$

Définition: (Sens de variation d'une suite numérique)

Soit u une suite numérique.

★ Lorsque chaque terme est plus ________ que celui qui le précède, on dit que la suite u est ________________ et on a pour tout entier n, $u(n+1) \geq u(n)$.

★ Lorsque chaque terme est plus _________ que celui qui le précède, on dit que la suite u est __________________ et on a pour tout entier n, $u(n+1) \leq u(n)$

Exercice n° 3. : On considère la suite définie par $u(n) = -2^n + 100$ pour tout entier n.

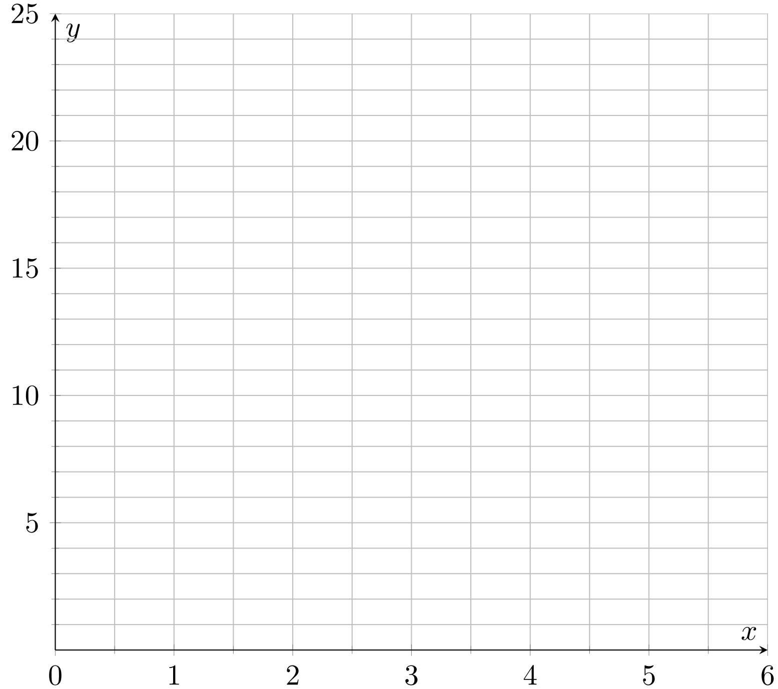
1. Calculer les premiers termes $u(0)$, $u(1)$ et $u(2)$.
2. Exprimer la différence $u(n+1) - u(n)$ en fonction de n.
3. Représenter la suite u sur l'écran d'une calculatrice, sur $[0, 8]$.
4. Conjecturer le sens de variation de cette suite u.

Exercice n° 4. : Dans chacun des cas suivants, préciser si la suite u est croissante ou décroissante.

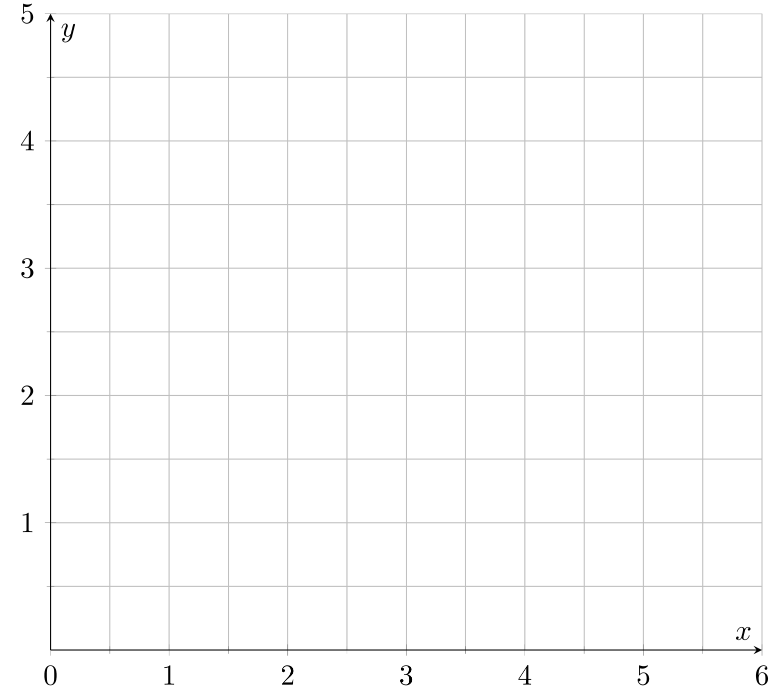
1. $u(n) = 3n + 1$
2. $u(n) = 5n^2 - 1$
3. $u(n) = -4n + 2$
4. $u(0) = 1$ et $u(n+1) = u(n) + 6$
5. $u(n) = 3 \times 2^n$
6. $u(n) = -n^2 + 2n + 15$

Feuille réponse de l'activité n° 3

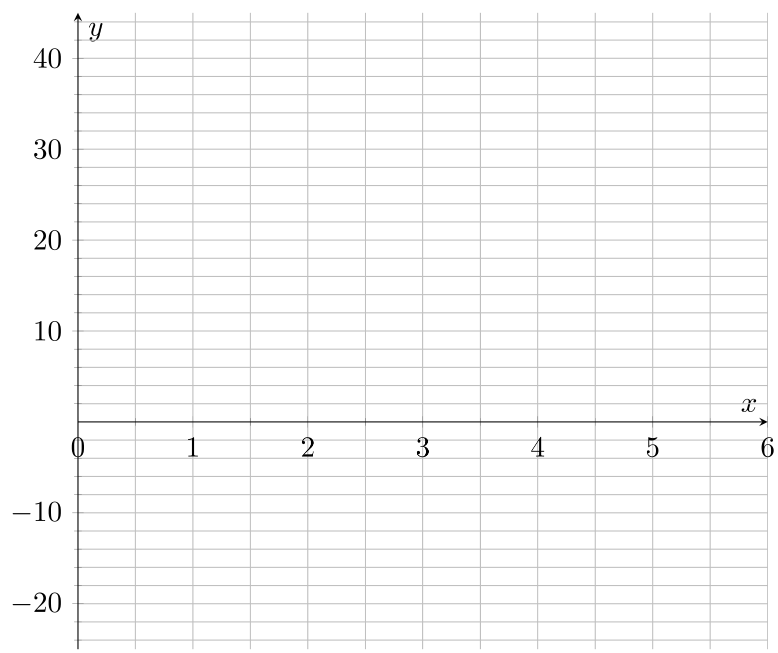
(1)



(2)



(3)



(4)