Chap. 4 : Probabilités conditionnelles

Objectifs

- Construire un arbre de probabilités associé à une situation aléatoire donnée.
- Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en termes de probabilités, et de probabilités conditionnelles.
- Faire le lien entre la définition des probabilités conditionnelles et la multiplication des probabilités des branches du chemin correspondant.
- Utiliser un arbre de probabilités pour calculer des probabilités.
- Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de Ω.

Dans tout ce chapitre, les événements A, B et autres seront considérés, sauf mention contraire, comme appartenant au même univers Ω.

1/ Rappels

Définition

Dans les conditions d'**équiprobabilité**, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de résultats dans } A}{\text{nombre total de résultats de } \Omega}$$

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Chaque carte a la même probabilité d'être choisie. L'univers, noté Ω, est le jeu de carte.

On considère les deux événements A et B suivants :

— A : « la carte tirée est rouge »

— B : « la carte tirée est un as »

Sachant qu'un jeu de 52 cartes contient 26 cartes rouges et 4 as, on calcule :

$$P(A) = \frac{26}{52} = 0,5 \qquad \text{et} \qquad P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Définition

L'événement **contraire** de A, noté $\overline{A}$, est réalisé si et seulement si l'événement A n'est pas réalisé.

Propriétés

Soit A un événement d'un univers Ω alors on a

$$0 \leq P(A) \leq 1 \qquad \text{et} \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Exemple : En reprenant l'énoncé de l'exemple précédent, l'événement $\overline{B}$ correspond à "la carte tiré n'est pas un as" et la probabilité associée vaut

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

Définition

- Un événement **impossible** est un événement qui n'est réalisé par aucune issue, on le note $\varnothing$
- Un événement **certain** est un événement est réalisé par toutes les issues.

Exemple : L'univers Ω est un dé à 6 faces et on note A l'événement : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 » et B l'événement : « obtenir 7 ».

Alors $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $B = \varnothing$ donc A est un événement certain et B est un événement impossible.

Propriétés

Soit Ω un univers quelconque alors on a : $P(\Omega) = 1$ et $P(\varnothing) = 0$

Définition

L'intersection $A \cap B$ est réalisé si l'événement A **ET** l'événement B sont réalisés en même temps.

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Chaque carte a la même probabilité d'être choisie. L'univers, noté Ω, est le jeu de cartes. On considère les événements :

— A : « la carte tirée est rouge »
— B : « la carte tirée est un as »
— C : « la carte tirée est un pique »

- L'événement $A \cap B$ est l'événement "La carte est un as **ET** la carte est rouge". Il y a 2 cartes sur les 52 cartes qui correspondent, il s'agit de l'as de coeur et de l'as de carreau ainsi $P(A \cap B) = \dfrac{2}{52} = \dfrac{1}{26}$
- L'événement $A \cap C$ est l'événement "La carte est rouge **ET** la carte est un pique". Il n'y a aucune carte sur les 52 cartes qui correspond, il s'agit donc d'un événement impossible, ainsi $P(A \cap C) = P(\varnothing) = 0$

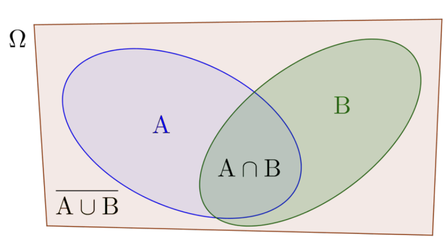
Définition

On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** ou **disjoints** lorsqu'on a : $A \cap B = \varnothing$.
Cela signifie que A et B ne peuvent pas se produire en même temps.

Définition

La réunion $A \cup B$ est réalisée si l'événement A **OU** l'événement B est réalisé (ou les deux).

Illustration de $A \cup B$:



Exemple : Dans une classe de 20 élèves, on choisit un élève au hasard et on considère les événements

— A : « L'élève est une fille »
— B : « l'élève a possède une calculatrice »

Alors $A \cup B$ est l'événement "l'élève est une fille OU ALORS l'élève possède une calculatrice".

On voit bien que l'élève peut très bien être une fille qui possède une calculatrice ...

Propriétés

Pour tout événements A et B d'un univers Ω, on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2/ Définition et premières propriétés

2/.1 Définition

Définition

On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité qu'un événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé, on la note $P_A(B)$.

Activité nº 1 Le laboratoire pharmaceutique *SYDNÉ* a réalisé des tests sur 80 000 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	38 000	29 600	67 600
Non guéri	7 000	5 400	13 400
Total	45 000	35 000	80 000

On choisit au hasard un patient et on considère les événements suivants :

A : « Le patient a pris le médicament A. »
B : « Le patient a pris le médicament B. »
G : « Le patient est guéri. »
$\overline{G}$: « Le patient est non guéri. »

1. Calculer : $P(A), P(G), P(G \cap A)$ et $P(G \cap B)$.

   ----

2. A l'aide de la question précédente, calculer les quotients $\dfrac{P(G \cap A)}{P(G)}$ et $\dfrac{P(G \cap B)}{P(B)}$.
3. On choisi maintenant au hasard un **patient guéri**.

   Quelle est la probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant** qu'il est guéri ?

   ----

4. On choisit maintenant au hasard un **patient ayant pris le médicament** B.

   Quelle est la probabilité que le patient soit guéri **sachant** qu'il a pris médicament B ?

   ----

5. Comparez les réponses des questions 3. et 4. avec les résultats de la question 2. Que remarquez-vous ?

Propriétés

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. Alors on a

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exercice nº 1 On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes et on note
- A l'événement « Le résultat est un pique »
- B l'événement « Le résultat est un roi »

Calculer $P_A(B)$, c'est-à-dire la probabilité d'obtenir un roi sachant que l'on a tiré un pique.

Propriétés

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Alors on a

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

Exercice nº 2 On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes et on note
- A l'événement « Le résultat est un pique »
- B l'événement « Le résultat est un roi »

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un roi ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir le roi de pique ?

3. On donne $P_A(B) = 0,076$. En utilisant la formule du cours, calculer $P(A \cap B)$. Que remarquez vous ?

3/ Arbre pondéré et probabilités totales

3/.1 Quelques propriétés sur les probabilités

Propriétés

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$. Alors on a

$$\_\_\_ \leq P_A(B) \leq \_\_\_ \qquad \text{et} \qquad P_A(\overline{B}) = \_\_\_\_\_\_$$

3/.2 Construire un arbre de probabilité

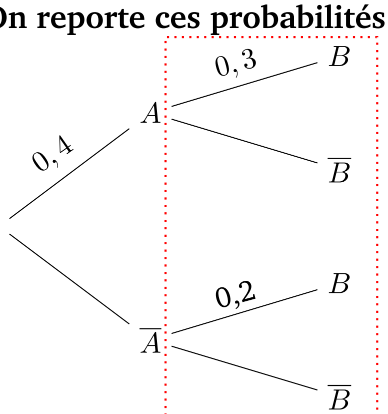
L'**arbre pondéré** est un outil efficace permettant de modéliser un problème de probabilté et de synthétiser efficacement les informations de façon claire.

Celui-ci peut être de forme très différente d'un énoncé à un autre. Ainsi le meilleur moyen de comprendre comment on le construit est en utilisant des exemples.

Exemple : On donne

$$P(A) = 0,4 \qquad P_A(B) = 0,3 \qquad P_{\overline{A}}(B) = 0,2$$

★ On reporte ces probabilités dans l'arbre



Au 2e niveau de l'arbre, on note les probabilités conditionnelles.

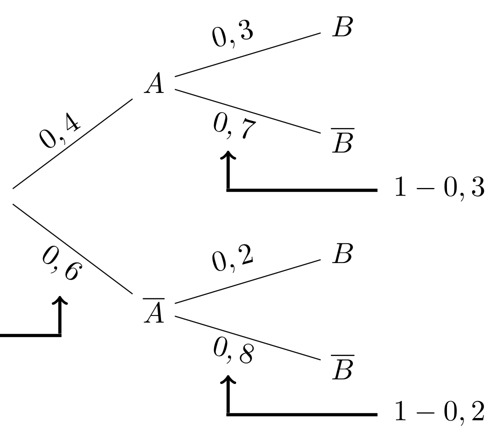
★ On complète les probabilités manquantes :

On utilise les formules

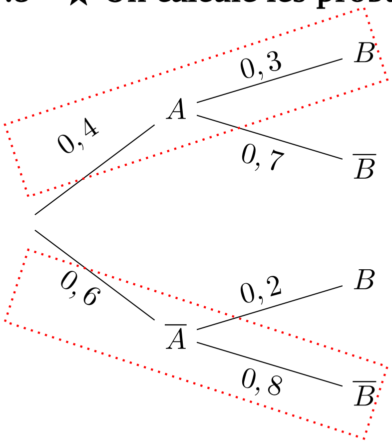
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

$1 - 0,4$



3/.3 ★ On calcule les probabilités d'intersections :



$\longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$

$\longrightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$

3/.4 Vocabulaire

Définition

Dans un arbre pondéré,
- Une _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ est représentée par un segment ; chacune porte une probabilité
- On appelle _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _, la jonction de deux ou plusieurs branches.
- On appelle _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _, l'événement réalisé en suivant des branches successives

3/.5 Règles de l'arbre pondéré

Règle nº 1

À partir d'un même nœud, la somme des probabilités est égale à _ _ _ _ _ _ _.

Règle nº 2

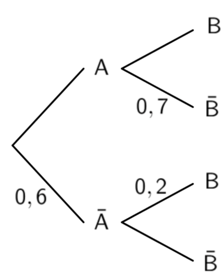
Pour calculer la probabilité d'un chemin, on _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ les probabilités des branches de ce chemin.

Règle nº 3

La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ des probabilités de chacun de ces chemins.

Exercice nº 3 On donne l'arbre pondéré ci-contre

1. Traduire les données de l'arbre sous forme de probabilités
2. À l'aide de l'arbre, calculer $P(A)$, $P_{\overline{A}}(\overline{B})$ et $P(A \cap B)$.



Exercice n° 4 Pour l'inscription à un concours, les candidats ont dû choisir une langue : anglais ou espagnol. 30% des candidats sont des garçons et 60% d'entre eux ont choisi l'anglais.
Parmi les femmes, 80% ont choisi l'anglais.

On choisit un candidat au hasard. On considère les événements suivants :
G : « le candidat choisi est un garçon »
A : « le candidat choisi a opté pour l'anglais ».

1. Traduire l'énoncé à l'aide des événements G et A.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré avec les données de l'énoncé
3. (a) Calculer $P_G(\overline{A})$ et $P_{\overline{G}}(\overline{A})$.
   (b) Calculer $P(G \cap A)$ et $P(\overline{G} \cap A)$.

Exercice n° 5 Un grossiste en appareils ménagers est approvisionné par trois marques de gaufriers, notées M_1, M_2 et M_3. La moitié des appareils de son stock provient de M_1, un huitième de M_2 et le reste de M_3.

13% des gaufriers de la marque M_1, 5% de ceux de la marque M_2 et 10% de ceux de la marque M_3 sont rouges.

On choisit au hasard un appareil dans le stock et on considère les événements
- M_1 :" L'appareil provient de la marque M_1"
- M_2 :" L'appareil provient de la marque M_2"
- M_3 :" L'appareil provient de la marque M_3"
- R :" L'appareil est rouge"

1. Déterminer $P(M_2)$.
2. Donner $P_{M_1}(R)$, puis déterminer $P_{M_1}(\overline{R})$
3. Déterminer la probabilité $P(M_1 \cap R)$.
4. Construire un arbre pondéré représentant cette situation.
5. Calculer la probabilité que l'appareil soit rouge.

Exercice n° 6 Le but de l'exercice est de vérifier l'efficacité d'un vaccin sur une population donnée. On dispose des données suivantes :
— Un quart de la population a été vacciné contre la maladie.
— La probabilité qu'une personne tombe malade sachant qu'elle a été vacciné est de 0,10.
— La probabilité qu'un individu ne soit pas malade sachant qu'il n'a pas été vacciné est égale à 0,70.

Pour une personne rencontrée au hasard, on note :
- M l'événement « être malade », $\overline{M}$ son contraire ;
- V l'événement « être vacciné », $\overline{V}$ son contraire.

1. On rencontre au hasard une personne dans la population. Construisez un arbre traduisant l'énoncé.
2. Calculer la probabilité qu'une personne soit à la fois malade et vacciné.
3. Calculer la probabilité qu'une personne ne soit ni malade ni vacciné.

3/.6 Probabilité totales

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$; et $A_1, A_2, \dots A_n$ des événements de probabilités non nulles. Ces événements forment une partition de l'univers Ω si
- ils sont disjoints deux à deux,
- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$

Exemple : Dans un jeu de cartes désigné par Ω, les événements
- A_1 : « la carte est un pique »
- A_2 : « la carte est un coeur »
- A_3 : « la carte est un trèfle »
- A_4 : « la carte est un carreau »

forment une partition du jeu de cartes. En effet, on a
- $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ (car une carte ne peut pas être un pique et en même temps un coeur)
- $A_2 \cap A_3 = \varnothing$ (car une carte ne peut pas être un coeur et en même temps un trèfle)
- $A_3 \cap A_4 = \varnothing$ (car une carte ne peut pas être un trèfle et en même temps un carreau)
- $A_4 \cap A_1 = \varnothing$ (car une carte ne peut pas être un carreau et en même temps un pique)

Ainsi ces événements sont disjoints.

Et si on prend la réunion des événements on retrouve le jeu tout entier. Autrement dit, on a $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \Omega$

Exemple : Pour tout événement A d'un univers Ω, les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

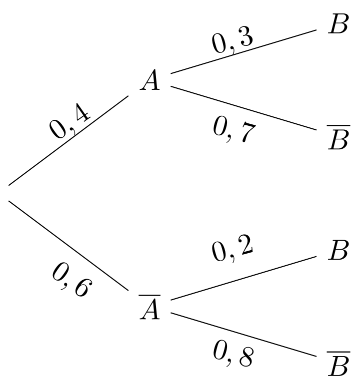
En effet, on a $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (car on ne peut obtenir une chose et son contraire) et $A \cup \overline{A} = \Omega$

Propriétés: (Formule des probabilités totales)

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $A_1, A_2, \dots A_n$ des événements de probabilités non nulles formant une partition de l'univers Ω. Si B est un événement quelconque alors la formule des probabilités totales s'écrit

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

Exemple : On considére deux événements A et B d'un univers Ω et on donne l'arbre pondéré suivant



On observe dans l'arbre qu'il y a 2 chemins pour obtenir l'événement B

$A \cap B$ de probabilité $P(A) \times P_A(B)$
$\overline{A} \cap B$ de probabilité $P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$

Étant donné que les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω, on en déduit d'après la formule des probabilité totales que

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \\ &= 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,2 \\ &= 0,24 \end{aligned}$$

Exercice n° 7 Une usine fabrique des tubes.
Des erreurs de réglage dans la chaîne de production peuvent affecter l'épaisseur ou la longueur des tubes.
Une étude menée sur la production a permis de constater que :

— 96% des tubes ont une épaisseur conforme ;

— parmi les tubes qui ont une épaisseur conforme, 95% ont une longueur conforme ;

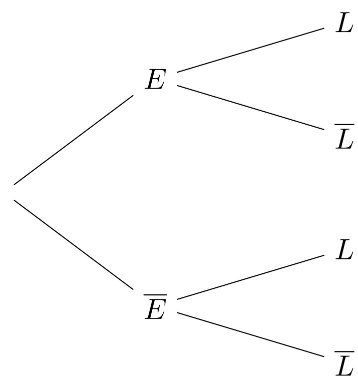
— 3,6% des tubes ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme.

On choisit un tube au hasard dans la production et on considère les événements :

- E : « l'épaisseur du tube est conforme » ;
- L : « la longueur du tube est conforme ».

On modélise l'expérience aléatoire par un arbre pondéré :

1. Recopier et compléter entièrement cet arbre.
2. Montrer que la probabilité de l'événement L est égale à $0,948$



Exercice n° 8 Une épidémie due à une bactérie s'est développée dans une grande ville. Afin de lutter contre cette épidémie en distribuant de façon raisonnée un antibiotique adapté, un organisme de santé a mis au point un test de dépistage.
On admet que :

— 15% de la population est contaminée par cette bactérie
— Le test est positif dans 99,6% des cas pour une personne contaminée par cette bactérie.
— Le test est négatif dans 97,6% des cas pour une personne non contaminée par cette bactérie.

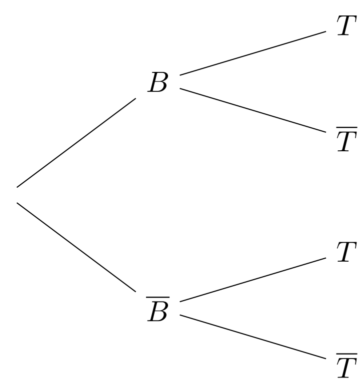
Une personne est choisie au hasard dans cette ville et on admet que chaque personne a la même probabilité d'être choisie.

On considère les événements suivants :

- B : « La personne choisie est contaminée par la bactérie »
- T : « Pour la personne choisie, le test est positif »

Dans chaque question, les résultats numériques seront donnés sous forme décimale exacte.

1. Recopier et compléter les branches de l'arbre pondéré ci-dessous :
2. Quelle est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne choisie est contaminée par la bactérie ?
3. Calculer la probabilité que la personne choisie soit contaminée par la bactérie, et que pour elle le test soit positif.
4. Quelle est la probabilité que, pour la personne choisie, le test soit positif ?



4/ Indépendance de deux événements

Activité n° 2 Une étude est réalisée auprès de 100 employés d'une entreprise afin de savoir s'ils préfèrent habiter en ville ou à la campagne. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

	Ville	Campagne	Total
Hommes	22	33	55
Femmes	18	27	45
Total	40	60	100

On considère les événements suivants :
- H : « La personne interrogée est un homme » ;
- V : « La personne interrogée préfère la ville »

1. Calculer $P(V)$ et $P_H(V)$. Que remarquez-vous ?

----

2. Calculer $P(V \cap H)$ et $P(V) \times P(H)$. Que remarquez-vous ?

Définition

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. On dit que B est **indépendant de** A si

$$P_A(B) = P(B)$$

Remarque : Pour deux événément A et B de probabilités non nulles, on a aussi $P_B(A) = P(A)$ lorsque A et B sont indépendants.

Propriétés

Soient A et B deux événements indépendants. Alors on a

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exercice nº 9 : On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes et on note
- R l'événement « La carte tirée est un roi »
- T l'événement « La carte tirée est un trèfle »

1. Les événements R et T sont-ils indépendants ?

   ----

2. On décide de rajouter les 2 jokers dans le jeu de cartes précédent.
   Les événements R et T sont-ils toujours indépendants ?

Exercice nº 10 Une urne contient 13 boules numérotées de 1 à 13. On en tire une hasard, et on considère les événements suivants
- A : "la boule tirée est un nombre pair",
- B : "la boule tirée est un multiple de 3"

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

   ----

2. Reprendre la question précédente avec une urne contenant 12 boules.

Exercice nº 11 Soient deux événements A et B tels que $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,5$.

1. On suppose que les événements A et B sont indépendants.
   (a) Calculer $P(A \cap B)$

   (b) En utilisant la formule du cours, en déduire la valeur de $P(A \cup B)$

   ----

2. On suppose maintenant que les événements A et B sont incompatibles.
   (a) Calculer $P(A \cap B)$

   (b) En utilisant la formule du cours, en déduire la valeur de $P(A \cup B)$
