

# Chap. 5 : Suites arithmétiques et géométriques

## Objectifs

- Connaître les relation de récurrence des suites arithmétiques/géométriques.
- Sens de variation d'une suite arithmétique/géométrique.
- Représentation graphique.
- Modélisation de problèmes d'évolution.

## 1/ Rappels

Une suite est une liste, potentiellement infinie, de nombres que l'on peut énumérer.  
Par exemple 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; ... est la liste des nombres entiers.

On retrouve les **suites numériques** dans de nombreux domaines :

- financier avec le calcul des mensualités dues à un crédit, des intérêts liés à un placement, l'évolution de la valeur d'un bien ou d'une action ;
- scientifique avec l'étude d'évolution de population, de la désintégration de substances radioactives, modélisation de phénomènes etc.

### Définition

Une **suite numérique** est une ..... qui, à tout **entier naturel**  $n$  ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ), associe un nombre réel **noté**  $u(n)$  ou  $u_n$ . On parle du terme de .....  $n$  de la suite.  
Ainsi une suite est ..... : elle se note  $u$  ou  $(u_n)$ .

## 2/ Définition d'une suite arithmétique

### Définition: (A retenir !)

Lorsque l'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre réel**  $a$ , on dit que la suite est .....

Une suite arithmétique de raison  $a$  est définie par la **relation de récurrence** :

$$u(n+1) = u(n) + a \quad \text{et le terme initial}$$

Avec la notation  
indicielle :

$$u_{n+1} = u_n + a$$

Le terme initial peut être  $u(0)$  de rang 0 ou  $u(1)$  de rang 1 ou de rang quelconque.

**Exemple :** Une suite  $u$  est définie par  $u_{n+1} = u_n + 3$  et  $u_0 = 100$ .

Cette suite est arithmétique de raison 3, car la relation de récurrence est de la forme  $u_{n+1} = u_n + a$  avec  $a = 3$ .  
On peut calculer les termes à l'aide d'une calculatrice ou d'un programme Python.

**QCM :** Dans la section 1/, quelles suites semblent être en progression arithmétique ?

**Exercice n° 1 :** Calculer les 10 premiers termes des suites suivantes :

1.  $u_{n+1} = u_n + 2$  et  $u_0 = 4$
2.  $u_{n+1} = u_n + 5$  et  $u_0 = 1$
3.  $u_{n+1} = u_n - 1$  et  $u_0 = 20$
4.  $u_{n+1} = u_n - 13$  et  $u_0 = 0$
5.  $u_{n+1} = u_n$  et  $u_0 = 4$
6.  $u_{n+1} = u_n - 100$  et  $u_0 = 1000$

**Exercice n° 2 :** Soit  $u$  la suite arithmétique de raison 10 et de terme initial  $u_0 = 0$ . Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .

### 3/ Représentation graphique d'une suite arithmétique

#### Propriétés

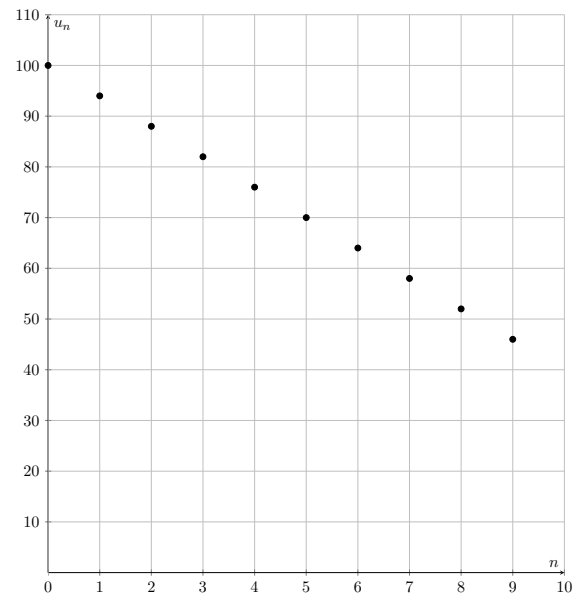
On représente une suite numérique par un nuage de points  $M_n(n; u_n)$ . Pour une suite arithmétique ce nuage de points est **représenté par des points alignés**. On parle de .....

**Exemple :** Soit  $(u_n)$  la suite arithmétique définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$u_0 = 100 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n - 6$$

On obtient

- $u_0 = 100$  donc  $M_0(0; 100)$
- $u_1 = u_0 - 6 = 100 - 6 = 94$  donc  $M_1(1; 94)$
- $u_2 = u_1 - 6 = 94 - 6 = 88$  donc  $M_2(2; 88)$
- $u_3 = u_2 - 6 = 88 - 6 = 82$  donc  $M_3(3; 82)$
- etc.



### 4/ Sens de variation d'une suite arithmétique

#### Théorème: (Sens de variation d'une suite arithmétique de raison $a$ )

Soit  $u$  une suite arithmétique de raison  $a$ , c'est à dire de la forme

$$u_{n+1} = u_n + a \quad \text{et le terme initial}$$

- Si  $a > 0$  alors la suite arithmétique  $u$  est .....
- Si  $a < 0$  alors la suite arithmétique  $u$  est .....
- Si  $a = 0$  alors la suite arithmétique  $u$  est .....

**Exercice n° 3 :** On désire calculer les termes de n'importe quelle suite arithmétique de raison  $a$  et de terme initial  $u_0$  à l'aide d'un tableur.

1. Lucas propose le tableur ci-contre pour la suite arithmétique de raison  $-6$ , et de terme initial 100

|   | A | B                   | C      |
|---|---|---------------------|--------|
| 1 | n | $U_n$               | raison |
| 2 | 0 | $= 100$             | $= -6$ |
| 3 | 1 | $= B2 + \$C\$2$     |        |
| 4 | 2 | $= \dots\dots\dots$ |        |
| 5 | 3 | $= \dots\dots\dots$ |        |
| 6 | 4 | $= \dots\dots\dots$ |        |
| 7 | 5 | $= \dots\dots\dots$ |        |

- (a) Que permet le symbole \$ dans la formule saisie en B3 ? Que devient la formule en B4 par recopie vers le bas ? Quel sera le résultat obtenu en B7 ?

**Activité n° 1 :** Pour s'acheter un scooter électrique à 850 €, Kerlandie a une somme initiale de 50 € et économise chaque semaine les 40€ qu'elle gagne en donnant des cours de mathématiques.

On appelle  $(u_n)$  le montant (en €) économisé la  $n$ -ième semaine et on note  $u_0 = 50$ .

- Donner l'expression de  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
- Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .
- Déterminer la nature de la suite (croissante ? décroissante) ?.
- On cherche un lien entre  $n$  et  $u_n$  afin de calculer rapidement tous les termes jusqu'à obtenir 850.
  - Conjecturer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$
  - Selon cette formule, au bout de combien de semaine Kerlandie pourra-t-elle acheter son scooter électrique ?

#### Propriétés: (A retenir)

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0 \in \mathbb{R}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$u_n = u_0 + nr$$

**Remarque :** Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a aussi  $u_n = u_1 + (n - 1)r$

**Exercice n° 4 :** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = u_n + 2$ .

- Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- Déterminer alors  $u_{50}$  et  $u_{65}$ .

**Exercice n° 5 :** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 10$  et  $u_{n+1} = u_n - 6$ .

- Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- Déterminer alors  $u_{30}$  et  $u_{101}$ .

## 5/ Définition d'une suite géométrique

### Définition: (A retenir!)

Lorsque l'on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par le même nombre réel  $q$** , on dit que la suite est .....

Une suite géométrique de raison  $a$  est définie par la **relation de récurrence** :

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{et le terme initial}$$

Le terme initial peut être  $u_0$  de rang 0 ou  $u_1$  de rang 1.

Une suite géométrique modélise une grandeur ayant un taux d'évolution constant.

On parle de .....

**Exemple :** Une suite  $u$  est définie par  $u_{n+1} = 5u_n$  et  $u_0 = 6$ .

Cette suite est géométrique de raison 5, car la relation de récurrence est de la forme  $u_{n+1} = q \times u_n$  avec  $q = 5$ .

**Exercice n° 6 :** Calculer les 10 premiers termes des suites suivantes :

1.  $u_{n+1} = 2u_n$  et  $u_0 = 4$

4.  $u_{n+1} = 9u_n$  et  $u_0 = 0$

2.  $u_{n+1} = 6u_n$  et  $u_0 = 1$

5.  $u_{n+1} = u_n$  et  $u_0 = 4$

3.  $u_{n+1} = -3u_n$  et  $u_0 = 20$

6.  $u_{n+1} = -4u_n$  et  $u_0 = -1$

**Exercice n° 7 :** Soit  $(u_n)$  la suite géométrique de raison 10 et de terme initial  $u_0 = 2$ . Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .

## 6/ Propriétés d'une suite géométrique

### Théorème: (Sens de variation d'une suite géométrique de raison $q$ )

Soit  $u$  une suite géométrique de raison  $q$ , c'est à dire de la forme

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{et le terme initial}$$

- Si  $q > 1$  alors la suite géométrique  $u$  est .....
- Si  $0 < q < 1$  alors la suite géométrique  $u$  est .....

**Activité n° 1 :** La soeur de Justine vient d'avoir un enfant. Afin de l'aider financièrement lorsqu'elle sera plus grande, Justine dépose une somme initiale de 2000 € le compte en banque de sa nièce.

Chaque année, les intérêts de la banque font que la nièce de Justine gagne 4% du montant présent sur le compte en plus de la somme qui s'y trouve.

On appelle  $(u_n)$  le montant (en €) placé à la banque la  $n$ -ième année et on note  $u_0 = 2000$ .

1. Donner l'expression de  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
2. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
3. Déterminer la nature de la suite (croissante? décroissante)?
4. On cherche un lien entre  $n$  et  $u_n$  afin de calculer rapidement tous les termes jusqu'à dépasser 4000€.  
 (a) Essayer de trouver une formule donnant l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
 (b) Au bout de combien d'année la nièce de Justine possèdera plus de 4000€ sur son compte en banque?

**Propriétés: (A retenir)**

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0 \in \mathbb{R}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$u_n = u_0 \times q^n$$

**Remarques :**

- Pour tout entiers naturels  $n$  et  $p$ , on a aussi  $u_n = u_p \times q^{n-p}$
- On parle de **croissance exponentielle** si  $q > 1$  et de **décroissance exponentielle** si  $0 < q < 1$ .

**Exercice n° 8 :** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = 2u_n$ .

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Déterminer alors  $u_{50}$  et  $u_{65}$ .

**Exercice n° 9 :** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 10$  et  $u_{n+1} = 6u_n$ .

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Déterminer alors  $u_{30}$  et  $u_{101}$ .

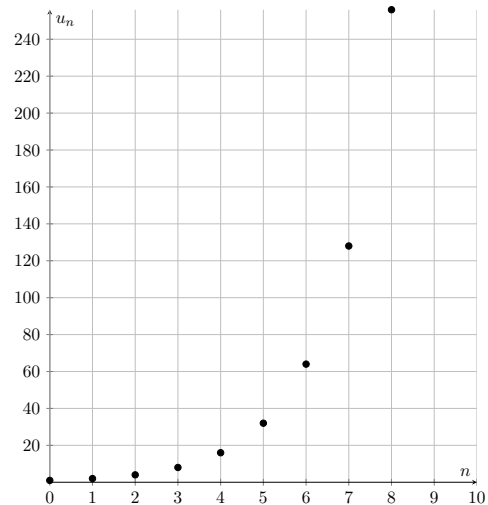
**7/ Représentation graphique d'une suite géométrique**

**Exemple :** Soit  $(u_n)$  la suite géométrique définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n$$

On obtient

- $u_0 = 1$  donc  $M_0(0; 1)$
- $u_1 = 2 \times u_0 = 2 \times 1 = 2$  donc  $M_1(1; 2)$
- $u_2 = 2 \times u_1 = 2 \times 2 = 4$  donc  $M_2(2; 4)$
- $u_3 = 2 \times u_2 = 2 \times 4 = 8$  donc  $M_3(3; 8)$
- $u_4 = 2 \times u_3 = 2 \times 8 = 16$  donc  $M_4(4; 16)$
- etc.



**Exercice n° 10 :** Dans chacune des suites de l'exercice n° 6, représenter les 5 premiers termes dans un repère orthonormé.

**8/ Approfondissement**

**Exercice n° 11 :** En janvier 2024, un rapport de la commission des affaires sociales au Sénat préconise une augmentation annuelle de 10% du prix du paquet de cigarettes. On suppose qu'une telle augmentation est appliquée chaque année et on note  $(u_n)$  la suite donnant le prix d'un paquet de cigarette au 1er juillet de l'année  $2024 + n$ .

Au 1er juillet 2024, le prix moyen d'un paquet de cigarette est de 6,50 €.

1. Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  .
2. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  .
3. Un fumeur achète 2 paquets par semaines. Entre le 1er juillet 2024 et le 30 juin 2025 , quelle sera le coût total de sa consommation ? Même question entre le 1er juillet 2031 et le 30 juin 2032 ?

**Exercice n° 12 :** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 0,5u_n + 1$ .

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3, u_4$  et  $u_5$ . La suite  $(u_n)$  est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
2. On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n - 2$
3. (a) Poursuivre le calcul,  $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$   
 $= \dots\dots$

Et montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,5

- (b) En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
4. Sachant que  $v_n = u_n - 2$ , donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice n° 13 :** Garbensky se pose la question suivante :

Quelle est la façon la plus rapide d'économiser 2500€ ?

Pour cela, il a le choix entre :

Cas 1 : Placer 20€ à la banque puis ajouter tous les mois 90€ sur son compte.

Cas 2 : Placer 500€ dans une action à la bourse lui rapporte des intérêts mensuels de 5%. (Chaque mois, la somme placée dans l'action de la bourse est multipliée par 1,05)

On note  $(u_n)$  la suite modélisant le cas 1 et  $(v_n)$  la suite modélisant le cas 2.

1. Écrire  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .  
En déduire que  $(u_n)$  est une suite arithmétique et préciser la raison et le premier terme.
2. Écrire  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .  
En déduire que  $(v_n)$  est une suite géométrique et préciser la raison et le premier terme.
3. Calculer  $u_1, u_2, \dots, u_7$  et  $v_1, v_2, \dots, v_7$ .  
Entre les cas n°1 et n°2, lequel semble être le plus avantageux ?
4. Écrire  $u_n$  en fonction de  $n$  et calculer  $u_{28}$ .
5. Écrire  $v_n$  en fonction de  $n$  et calculer  $v_{28}$ .
6. Conclure.
7. Garbensky se pose maintenant la question

Entre les cas 1 et 2, quelle est la façon la plus rapide d'économiser 6000€ ?

- (a) A l'aide des questions précédentes, calculer  $u_{51}$  et  $v_{51}$
- (b) Conclure.

**Exercice n° 14 :** Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$u_0 = 6561 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2(u_n)^2 - u_n}{6u_n - 3}$$

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ .
2. Calculer  $\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}$  et  $\frac{u_4}{u_3}$ . Que remarquez-vous ?
3. Que pouvez-vous conjecturer sur la suite  $(u_n)$  ?
4. On souhaite démontrer la conjecture précédente.
  - (a) Montrer que  $u_n(2u_n - 1) = 2(u_n)^2 - u_n$
  - (b) En déduire que  $u_n = \frac{u_n(2u_n - 1)}{3(2u_n - 1)}$  et simplifier au maximum. On trouve alors  $u_n = \dots\dots$
  - (c) En déduire que  $(u_n)$  est une suite géométrique et préciser sa raison.
  - (d) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - (e) Donner une valeur approchée de  $u_{33}$