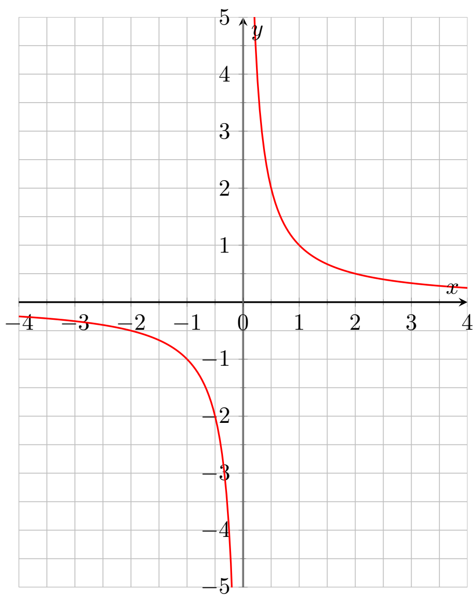
Chap. 5 : La fonction inverse

Objectifs

- Courbe représentative ;
- Étudier et représenter des fonctions obtenues par combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynomiales simples
- Dérivée et sens de variation.
- Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition

1/ Définition et courbe représentative de la fonction inverse



Courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Définition

La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Remarque : Pour que la fonction f soit définie, il faut que le dénominateur soit différent de 0. On dit que 0 est une valeur interdite.

Définition

La courbe représentative de la fonction inverse est appelée __________________.

2/ Dérivée et sens de variation

Activité nº 1. : Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ la fonction inverse. On cherche à déterminer sa fonction dérivée, pour cela, on considère a et h de nombres réels non nuls

1. Montrer $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\dfrac{1}{a(a+h)}$
2. Lorsque h tend vers 0, qu'obtient-on ? En déduire la valeur de $f'(a)$
3. Déterminer le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variation de f.

Propriétés

La fonction inverse est .... sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ et pour tout réel x non nuls,

on a $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et donc $f'(x) < 0$.

Ainsi, comme la dérivée de la fonction inverse est négative, on en déduit la propriété suivante

Propriétés

La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est .... sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Autrement dit, on obtient le tableau de variations suivant

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
f	$\searrow$	||	$\searrow$

Remarque : Attention ! Ne pas dire (ou écrire) que la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ car ce dernier n'est pas un intervalle !

Exercice n° 1. Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = 3x - 2 + \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = 3x^2 - 5x + 20 + \dfrac{1}{x}$
4. $f(x) = -2x^3 + 4x^2 + 1 + \dfrac{1}{x}$

Exercice n° 2. Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

1. $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$

Exercice n° 3. Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que pour tout $x \neq 0$
$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$
3. Réaliser le tableau de signes de $f'(x)$.
4. En déduire le tableau de variation de f.

Exercice nº 4. Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

1. $f(x) = x + 5 + \dfrac{5}{x}$
2. $f(x) = 7x - \dfrac{10}{x}$

Exercice nº 5. Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = 9x + 10 + \dfrac{36}{x}$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que pour tout $x \neq 0$
$$f'(x) = \frac{9(x-2)(x+2)}{x^2}$$
3. Réaliser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
4. En déduire le tableau de variation de f sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

3/ Comportement de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ aux bornes de l'ensemble de définition

Activité nº 2. Soit f la fonction définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. (a) Compléter le tableau suivant

x	1	5	10	100	1 000	1 000 000
$f(x)$						

   (b) Que remarquez-vous ?

   ----

2. (a) Compléter le tableau suivant

x	$-10\ 000\ 000$	$-10\ 000$	$-1\ 000$	-100	-10	-5
$f(x)$						

   (b) Que remarquez-vous ?

   ----

3. Compléter le tableau suivant

x	-0.5	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	...	$0,001$	$0,0001$	$0,00001$
$f(x)$					**X**			

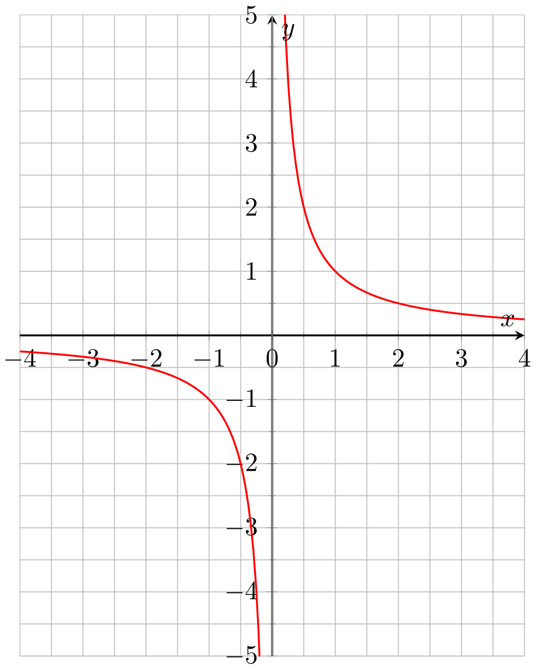
4. Que remarquez-vous ?

Propriétés:

— On dit alors que la **limite** de la fonction inverse quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0 et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

— On dit alors que la **limite** de la fonction inverse quand x tend vers 0 pour $x > 0$ est égale à $+\infty$ et on note $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$

— De même, on a aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$



Courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Définition

- On dit que la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est une ____________________________
- De même, on dit que la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est une _________________________

Propriétés

Finalement, on a le tableau de variations suivant pour la fonction inverse

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
f	$0 \longrightarrow -\infty$	‖	$+\infty \longrightarrow 0$

4/ Cas général

Définition: (Asymptotes dans le cas général)

- Plus généralement, lorsque l'on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ pour une fonction f, on dit que la droite d'équation $y = a$ est une **asymptote horizontale** de f
- De même, lorsque l'on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ pour une fonction f, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de f

Activité n° 3. Soit f la fonction définie pour réels non nuls par $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x}$

1. (a) Compléter les tableaux suivants

x	10	50	100	1000	10 000	1 000 000
$f(x)$						

x	1	$0,1$	$0,001$	$0,0001$	$0,00001$	$0,000001$
$f(x)$						

   (b) Quelles sont les asymptotes de la fonction f ?

Exercice n° 6. Soit la fonction f définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 - 2x - \dfrac{2}{x}$

1. Calculer $f'(x)$ la fonction dérivée de f et montrer que $f'(x) = \dfrac{-2(x-1)(x+1)}{x^2}$
2. Réaliser le tableau de signes de f' sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
4. Représenter la fonction f dans un repère orthonormé.
5. Quelles sont les asymptotes de la fonctions f ?

Exercice nº 7. Soit la fonction f définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = 5x + \dfrac{20}{x} - 7$

1. Caluler $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{5(x-2)(x+2)}{x^2}$
2. Réaliser le tableau de signes de f' sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
4. Représenter la fonction f dans un repère orthonormé.
5. Quelles sont les asymptotes de la fonctions f ?

Problème. Un petit laboratoire pharmaceutique situé a Sinnamary a calculé que le **coût de production journalier** (en centimes d'euros) de x flacon de Virapic est donné par la fonction : $f(x) = x^2 + x + 900$.

Il cherche à fabriquer un nombre maximal de flacon par jour avec un coût unitaire moyen le plus faible possible.

1. (a) Calculer $f(0)$ et en déduire les frais fixes journalier du laboratoire.
   (b) Quel est le coût de production de 20 flacons de Virapic ?
2. On admet que le **coût moyen unitaire** (en centimes d'euros) pour x flacons de Virapic fabriqués peut s'exprimer en fonction de x comme suit :

$$g(x) = x + 1 + \frac{900}{x}$$

   (a) Calculer $g'(x)$.
   (b) Montrer que $g'(x) = \dfrac{(x-30)(x+30)}{x^2}$
   (c) Réaliser le tableau de signes de $g'(x)$ et en déduire le tableau de variations de g.
   (d) Combien de flacons doit produire le laboratoire pharmaceutique pour que le coût moyen unitaire soit minimal ? Donner la valeur de ce coût.