Chap. 6 : Fonctions polynomiales de degré 3

Objectifs

- Représentations graphiques des fonctions : $x \mapsto ax^3, x \mapsto ax^3 + d$
- Racines et signe d'un polynôme de degré 3 de la forme $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
- Équation $x^3 = k$; racine cubique d'un nombre réel positif et notations $\sqrt[3]{k}$ et $k^{\frac{1}{3}}$.

1/ La fonction cube $x \mapsto x^3$

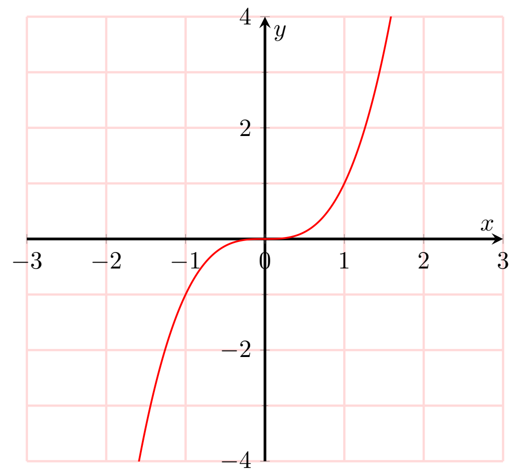
Définition

La **fonction cube** est définie sur $]-\infty;+\infty[$ par : $x \mapsto x^3$. Sa courbe représentative dans un repère orthonormé est donnée par la figure de droite →

Propriétés

La fonction cube est _ sur $]-\infty;+\infty[$.

Cela signifie que **si** $x_1 < x_2$ **alors** $(x_1)^3 < (x_2)^3$



Vous avez déjà étudié les **fonctions polynomiales de degré 2** il y a quelques semaines, c'est-à-dire les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels.

Nous allons maintenant étudier les fonctions de la forme $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels.

Définition

On appelle fonction **polynomiale (ou fonction polynôme) de degré** 3 toute fonction réelle de la forme

$$x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où a, b, c et d sont des réels avec $a \neq 0$.

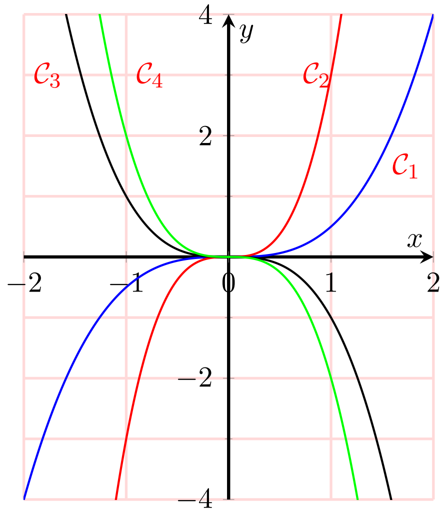
2/ Cas 1 : Les fonctions polynomiale de la forme $x \mapsto ax^3$

2 / 1 Allures des courbes et propriétés

Activité nº 1. : À l'aide d'une calculatrice, visualiser les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ des fonctions suivantes :

$a)$ $x \mapsto 0,5x^3$ $b)$ $x \mapsto 3x^3$ $c)$ $x \mapsto -x^3$ $d)$ $x \mapsto -2x^3$

1. Pour chacune des fonctions,
   — Réaliser le tableau de signes sur $]-\infty;+\infty[$.
   — Réaliser le tableau de variations $]-\infty;+\infty[$.
2. Qu'observez-vous ?



Propriétés: (Sens de variations des fonctions $x \mapsto ax^3$)

Les fonctions $x \mapsto ax^3$ où a est un réel non nul sont :

— ____________________ sur $]-\infty;+\infty[$ **si** $a > 0$.

— ____________________ sur $]-\infty;+\infty[$ **si** $a < 0$.

Propriétés

Les fonctions $x \mapsto ax^3$ où a est un réel non nul ____________________________________ c'est à dire par le point de coordonnées $(0;0)$

Définition

Pour tout réel k, **il n'existe qu'une seule solution** à l'équation $x^3 = k$ appelée **la racine cubique de** k**.**

Notation : La racine cubique du réel k s'écrit $\sqrt[3]{k}$ ou $k^{\frac{1}{3}}$.

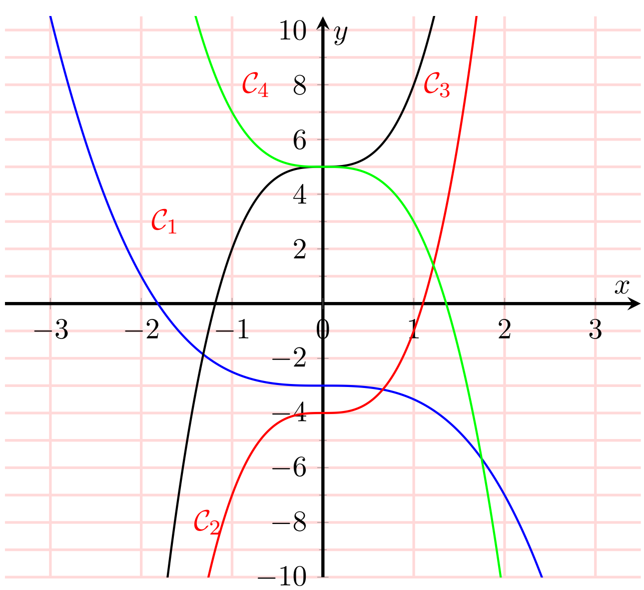
Exercice nº 1. Résoudre les équations suivantes :

1. $x^3 = 8$
2. $7x^3 = 875$
3. $41x^3 = -1107$
4. $-6x^3 = 4374$

3/ Cas 2 : Les fonctions polynomiale de la forme $x \mapsto ax^3 + d$

Activité nº 2. : À l'aide d'une calculatrice, visualiser les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ des fonctions suivantes :

$a)$ $x \mapsto -0,5x^3 - 3$ $b)$ $x \mapsto 3x^3 - 4$ $c)$ $x \mapsto 3x^3 + 5$ $d)$ $x \mapsto -2x^3 + 5$



1. Pour chacune des fonctions,
   — Associer chaque fonction à sa courbe correspondante.
   — Le tableau de signes sur $]-\infty;+\infty[$.
   — Déterminer le sens de variations.
   — Réaliser le tableau de variations $]-\infty;+\infty[$.

2. Qu'observez-vous de particulier entre les fonctions et les courbes correspondantes ?

3 / 1 Propriétés

Propriétés: (Sens de variations des fonctions $x \mapsto ax^3 + d$)

Les fonctions $x \mapsto ax^3 + d$ où a est un réel non nul sont :

— ______________________________ sur $]-\infty; +\infty[$ **si** $a > 0$.

— __________________________________ sur $]-\infty; +\infty[$ **si** $a < 0$.

Propriétés: (A retenir) !

Les fonctions $x \mapsto ax^3 + d$ où a est un réel non nul ______________________________ $(0; d)$

Exercice nº 2. Résoudre les équations suivantes :

1. $x^3 + 18 = 2179$
2. $7x^3 = 875$
3. $x^3 = -27$
4. $-6x^3 = 4374$

Exercice nº 3. Un laboratoire produisant des médicaments pharmaceutiques souhaite étudier le coût total de sa production. Pour une quantité q de 0 à 6 tonnes de médicaments, le coût total en milliers d'euros est modélisé par la fonction $C(q) = 0,05q^3 + 4$.

Aidez le directeur de ce laboratoire afin qu'il sache combien de tonnes de médicaments il peut produire pour un coût de 10 250€.

4/ Cas nº 3 : Les fonctions de la forme $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Activité nº 3. Lors de son temps libre, Loane s'intéresse aux polynômes de degré 3 et à leurs racines.

On souhaite résoudre l'équation suivante $x^3 - 8x^2 - 11x + 18 = 0$.

1. On note $f(x) = x^3 - 8x^2 - 11x + 18 = 0$.
   (a) Calculer $f(x)$ pour x allant de -5 à 10.
   (b) Quelles semblent être les solutions de l'équation précédente ?
   (c) Maintenant que l'on connait les solutions, pouvez-vous trouver une façon de factoriser le polynôme $x^3 - 8x^2 - 11x + 18$?

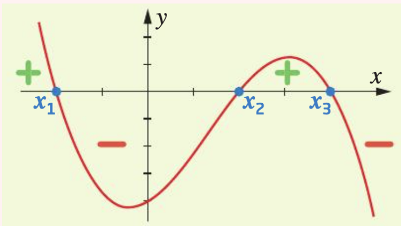
4 / 1 Propriétés

Propriétés

- Un polynôme de degré 3 ayant la forme factorisée :

  $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, avec $a \neq 0$ et $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

  admet ______________________ qui sont x_1 , x_2 et x_3.



- Si les trois solutions sont _________________ , la courbe **traverse trois fois l'axe des abscisses**, et le polynôme est alternativement positif ou négatif.

Propriétés

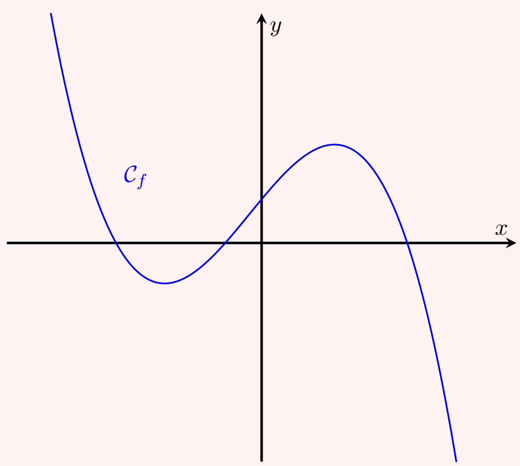
On considère la fonction polynômiale de degré 3 ayant la forme factorisée :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \quad \text{et} \quad x_1 \leq x_2 \leq x_3$$

Alors on a **les tableaux de signes** suivants

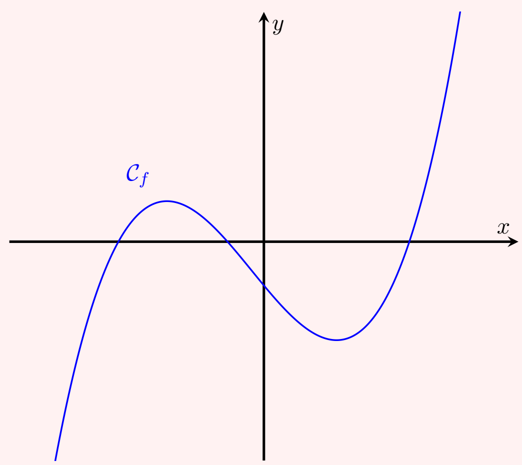
★ **Cas n°1 :** $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	



★ **Cas n°2 :** $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	



Exercice n° 4. Réaliser le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes

1. $f(x) = -5(x - 1)(x - 5)(x - 2)$
2. $f(x) = (x - 1)(x - 5)(x - 3)$
3. $f(x) = -(x + 3)(x + 3)(x - 3)$
4. $f(x) = -x(x - 1)(x + 1)$

Exercice n° 5. Soit P la fonction polynomiale $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.

1. Montrer que $(x + 3)^2(x - 1) = P(x)$
2. Étudier le signe de $P(x)$ à l'aide d'un tableau de signes.
3. Vérifier votre tableau en traçant la courbe sur votre calculatrice.

Exercice n° 6. On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 9x$.

1. Factoriser $f(x)$ en produit de facteurs de degré 1.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$
3. Réaliser le tableau de signes de $f(x)$.
4. La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est la courbe de la fonction f sur l'écran d'une calculatrice.

   Résoudre $f(x) \geq 0$