Chap. 7 : Variations de fonctions

Objectifs

- Déterminer le signe d'une expression du premier degré.
- Tracer une droite donnée par son équation réduite ou par un point et son coefficient directeur.
- Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite.
- Déterminer l'équation réduite d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points.
- Taux de variation en un point.
- Lien entre taux de variation et variation des fonctions.

1/ Équation réduite d'une droite

Le plan usuel est rapporté à un repère orthonormé.

Définition

On appelle ______________ d'une droite (D), toute équation de la forme

$$y = mx + p$$

où m et p sont des nombres réels donnés.

Exemples : • $y = 3x + 2$ • $y = 5x + 18$ • $y = x + 4$ • $y = x$

Propriétés

Toute droite (D) sécante à l'axe des ordonnées ___________ une équation réduite ______.

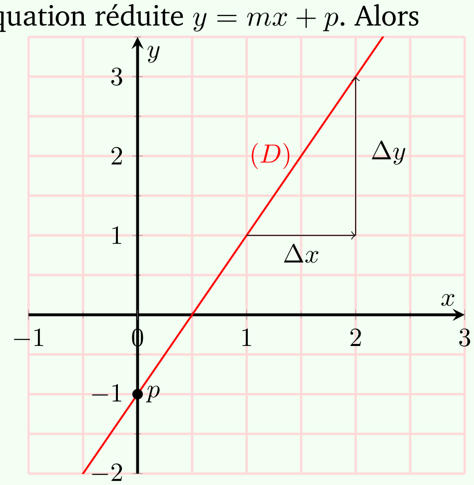
1 / 1 Déterminer graphiquement l'équation réduite d'une droite

Définition

On considère une droite (D) sécante à l'axe des ordonnées d'équation réduite $y = mx + p$. Alors

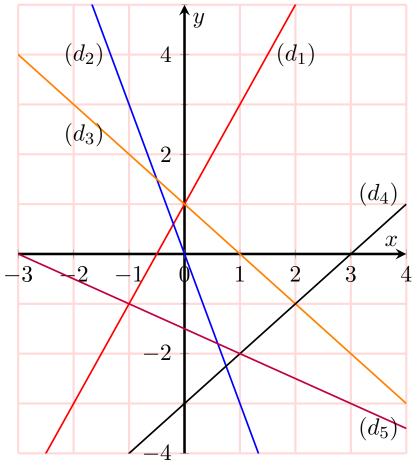
— le nombre m s'appelle le _____________________ de (D) et est donnée par $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

— p s'appelle _________________ . C'est la valeur de la droite au point d'abscisse 0.



Méthode : Dans l'illustration précédente, on a $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{1} = 2$ et on observe que p a pour ordonnée -1, ainsi l'équation réduite de la droite D est $y = 2x - 1$.

Exercice n° 1.

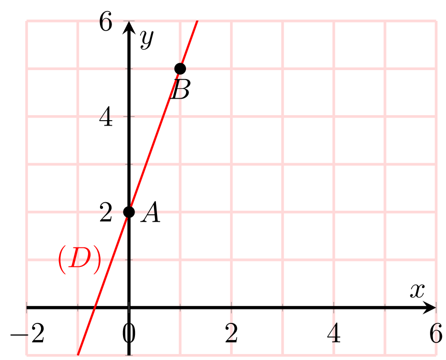


1. Déterminer l'équation réduite de chacune des droites.
2. Déterminer graphiquement l'intersection de chacune des droites avec l'axe des abscisses.
3. Retrouver ce résultat en résolvant l'équation $mx+p=0$ pour chacune des droites.
4. Réaliser le tableau de signes sur $]-\infty;+\infty[$ pour chacune des droites.

1 / 2 Tracer une droite d'après son équation réduite

Méthode : Soit (D) la droite d'équation réduite $y=3x+2$, alors
- le nombre 3 est le **coefficient directeur**
- 2 est **l'ordonnée à l'origine**.

Pour tracer la droite (D), nous avons besoin de 2 points. Par exemple pour $x=0$ obtient $y=3\times0+2=2$ donc le point $A(0;2)$ appartient à la droite (D) et pour $x=1$ on obtient $y=3\times1+2=5$ donc le point $B(1;5)$ appartient aussi à la droite (D). Il suffit alors de relier les points A et B pour obtenir la droite (D)



Exercice n° 2. Tracer chacune des droites suivantes dans un même repère orthonormé

1. La droite (D) d'équation $y=2x+1$
2. La droite (D') d'équation $y=4x+3$
3. La droite (D'') d'équation $y=-2x+2$
4. La droite (Δ) d'équation $y=x$
5. La droite (Δ') d'équation $y=-x+10$
6. La droite (Δ'') d'équation $y=0,5x+1$

Propriétés

Soient (D) une droite d'équation réduite $y=mx+p$ et $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ deux points distincts de (D).

Le __________________ de la droite (D) est donné par $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Méthode : Soit (D) la droite passant par $A(2;1)$ et $B(3;7)$. Alors le coefficient directeur de (D) est

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{7-1}{3-2}=\frac{6}{1}=6$$

Donc l'équation s'écrit $y=6x+p$. Et comme la droite passe par A, elle vérifie

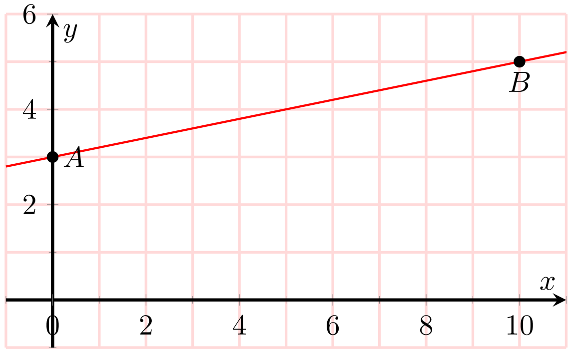
$$1=6\times2+p \qquad \text{donc} \qquad p=1-12=-11$$

Finalement l'équation de (D) est $y=6x-11$.

Exercice nº 3. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

1. $A(-3;2)$ et $B(0;1)$
2. $A(0;0)$ et $B(13;-1)$
3. $A(-1;-1)$ et $B(-4;-4)$
4. $A(-2;-4)$ et $B(\frac{1}{2};\frac{1}{3})$

Exercice nº 4.



1. Donner les coordonnées des points A et B.
2. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
3. En déduire une équation réduite de la droite (AB).
4. En utilisant le résultat de la question 2., exprimer le coefficient directeur de la droite (AB) sous forme de pourcentage.
5. Si l'on choisit comme unité le mètre, expliquer à l'aide d'une phrase comment interpréter ce résultat.

Exercice nº 5. Samyra enlève le bouchon de sa baignoire, puis elle note le niveau d'eau dans le bain toutes les 2 minutes. Voici les données qu'elle recueille :

Temps écoulé (min)	2	4	6	8
Niveau d'eau (cm)	30	22	14	6

1. Représenter les points du tableau dans un repère orthonormé.
2. Les points semblent-ils alignés ?
3. Déterminer l'équation réduite de la droite (D) par ces points.
4. À quelle vitesse le niveau d'eau dans la baignoire diminue-t-il ?
5. Quel était le niveau d'eau dans le bain avant que Samyra enlève le bouchon ?

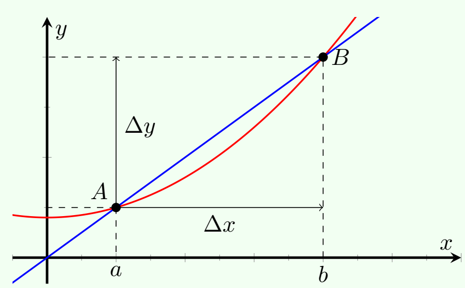
2/ Taux d'accroissement & et variation moyenne d'une fonction

Définition

Pour tous nombres réels a et b distincts, on appelle .... de f entre a et b le quotient

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

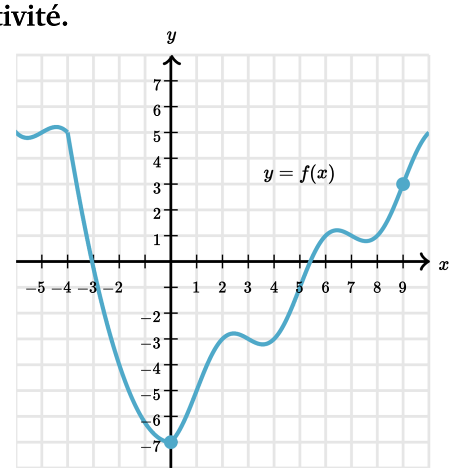
Ce nombre m correspond au **coefficient directeur de la droite** passant par les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ et permet de décrire la **variation moyenne** d'une fonction sur $[a;b]$



Exercice nº 6. : Calculer le taux d'accroissement de la fonction f chacun des cas suivants

1. $f(x) = 2x$ en $a = 1$ et $b = 4$
2. $f(x) = x^2$ en $a = 3$ et $b = 5$
3. $f(x) = 3x^2$ en $a = 4$ et $b = 6$
4. $f(x) = 5x + 1$ en $a = 1$ et $b = 4$
5. $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ en $a = 2$ et $b = 5$
6. $f(x) = -x^2 + 6x + 2$ en $a = -2$ et $b = 3$

Activité.



1. Déterminer $f(-4)$, $f(0)$, $f(2)$ et $f(6)$.
2. Graphiquement, déterminer le sens de variation de f entre -4 et 0.
3. Calculer le taux de variation de la fonction f entre -4 et 0.
4. Graphiquement, déterminer le sens de variation de f entre 0 et 2.
5. Calculer le taux de variation de la fonction f entre les points 0 et 2.
6. Graphiquement, déterminer le sens de variation de f entre 4 et 6 ?
7. Calculer le taux de variation de la fonction f entre les points 4 et 6.
8. Que peut-on en déduire ?

Propriétés

- Si f est croissante sur un intervalle I alors le taux de variation de f sur I est _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _.
- Si f est décroissante sur un intervalle I alors le taux de variation de f sur I est _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Activité. On reprend le graphique de l'activité précédente,

1. Déterminer le taux de variation entre 0 et 9. Est-il positif ou négatif ?
2. La fonction f est-elle croissante sur $[0; 9]$?

Propriétés

Lorsque le taux d'accroissement de f entre deux points d'abscisse a et b est

— _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ et ne change pas de signe alors la fonction f est croissante entre a et b

— _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ et ne change pas de signe alors la fonction f est décroissante entre a et b

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ sur I si elle est croissante ou décroissante sur I.

Exercice n° 7. On considère la fonction f donnée pour tout $x \in]-\infty; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 7x + 10$.

1. Calculer le taux de variation de f entre 1 et 7.
2. Calculer le taux de variation de f entre 1 et 2.
3. À partir des questions précédentes, peut-on affirmer que la fonction f est monotone sur $[1; 7]$. ?

Exercice n° 8. Soit f une fonction dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

x	0		5
$f(x)$	7	$\searrow$	-4

1. Sans calcul, déterminer le signe du taux de variation de f entre 0 et 5.
2. Déterminer le taux de variations de f entre 0 et 5.

Exercice n° 9. On considère la fonction g dont on donne le tableau de variations ci-dessous .

x	0		2		7		10
$g(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

1. Sans faire de calcul, déterminer le signe du taux de variation de f entre 0 et 2, 2 et 7 puis entre 7 et 10.
2. Déterminer le taux de variation de f entre 0 et 2 puis entre 7 et 10.

Exercice n° 10. À la suite de la découverte d'une nouvelle souche du virus de la grippe, les autorités sanitaires décident d'observer l'évolution de la maladie dans une grande ville. Les médecins ont estimé que le nombre de malades durant les 100 premiers jours est donné par la fonction $f(t) = t^2 + 20t$, où t est le nombre de jours après l'apparition de l'épidémie.

1. Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat.
2. Quel était le nombre de malades au bout de 30 jours ? Au bout de 60 jours ? Au bout de 90 jours ?
3. Calculez le taux de variations de f entre 0 et 30, puis entre 30 et 60 et enfin entre 60 et 90 jours.
4. Complétez alors les phrases suivantes :

   « Entre le 0e et le 30e jour, l'épidémie s'est propagée à une vitesse moyenne de ...... cas par jours ».

   « Entre le 30e et le 60e jour, l'épidémie s'est propagée à une vitesse moyenne de ...... cas par jours ».

   « Entre le 60e et le 90e jour, l'épidémie s'est propagée à une vitesse moyenne de ...... cas par jours ».

Exercice n° 11. Un laboratoire de Kourou a modélisé le prix de vente (en euros) en fonction de la production journalière (en litre) d'huile d'avocat par la fonction $f(x) = -0,1x^2 + 3x + 100$

1. Calculer $f(20)$ et $f(30)$.
2. En déduire la différence de prix de vente d'huile d'avocat si la production du laboratoire passe de 20L à 30L par jour.
3. Calculez le taux de variation de f entre les points d'abscisse 20 et 30.
4. En déduire la **variation moyenne** du prix par litre si la production passe de 20L à 30L par jour ?
5. Comment le prix par litre va-t-il varier si la production passe de 20L à 50L par jour ?