Chap. 8 : Probabilités conditionnelles

Objectifs

- Rappels sur les opérations d'ensembles.
- Notation $\cup$ (union) et $\cap$ (inter).
- Notion de cardinal et notation $\mathbf{card}$.
- Calcul de probabilités.
- Notation $P_A(B)$.

Dans tout ce chapitre, les événements A, B et autres seront considérés, sauf mention contraire, comme appartenant au même univers Ω.

1/ Rappels sur les probabilités

Définition

- On dit qu'une expérience est _______________ lorsqu'on peut la reproduire dans les mêmes conditions et que le résultat, appelé _________, est imprévisible.
- L'ensemble de toutes les issues possibles est appelé _____________ de l'expérience aléatoire.
- On appelle __________________ une réunion d'issues.

Remarque : L'univers d'une expérience aléatoire est souvent noté Ω.

Exemple : On choisit un élève au hasard parmi les élèves de 1ère ST2S et on note sa date d'anniversaire (jour et mois). L'univers de cette expérience est l'ensemble des 366 jours d'une année.

Un événement serait, par exemple, « La personne choisie est née en août. », qui rassemble 31 issues : les jours du 1er au 31 août.

Définition

On note appelle ______________ le nombre d'éléments d'un ensemble. Pour un événement, cela représente le nombre d'issue de l'événement.

Pour un ensemble (ou un événement) A, on note $\mathbf{card}(A)$.

Définition

Lors d'une expérience aléatoire sur un univers fini Ω dont les issues sont **équiprobables**, on appelle ___________________ d'un événement A la proportion d'issues qui réalisent cet événement,

$$P(A) = \frac{\mathbf{card}(A)}{\mathbf{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues total}}$$

Exemple : Dans la classe de 1ère STMG ♡, on note Ω l'ensemble des élèves de la classe et A l'ensemble des filles de la classe alors $\mathbf{card}(\Omega) = 9$ et $\mathbf{card}(A) = 4$ donc $P(A) = \dfrac{\mathbf{card}(A)}{\mathbf{card}(\Omega)} = \dfrac{4}{9}$

Exemple : On note Ω : « l'ensemble des élèves de 1ère ST2S » et A : « l'élève est possède une calculatrice ». On choisis un élève au hasard. Les cas sont équiprobables et on a

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dots\dots\dots\dots\dots$$

Définition

- Un événement dont la probabilité est égale à 0 est un événement ________________, on le note $\varnothing$
- Un événement dont la probabilité est égale à 1 est un événement ____________
- L'intersection $A \cap B$ est réalisé si l'événement A **ET** l'événement B sont réalisés en même temps.
- La réunion $A \cup B$ est réalisée si l'événement A **OU** l'événement B est réalisé (ou les deux).
- On dit que deux événements A et B sont ________________________ lorsqu'on a $A \cap B = \varnothing$.
- L'événement ________________ de A, noté $\overline{A}$, est réalisé si et seulement si l'événement A n'est pas réalisé.

Propriétés

Pour tout événements A et B d'un univers Ω, on a

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)} \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \qquad \text{et} \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Exemple : On considère un jeu de 32 cartes ainsi que les événements suivants :

— A : « tirer un roi » — B : « tirer un coeur » — C : « tirer une carte noire »

- L'événement $A \cap B$ est l'événement « tirer un roi **ET** un coeur ». Il s'agit donc de tirer le roi de coeur (il n'y en a qu'un), ainsi $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$
- L'événement $B \cap C$ est l'événement « tirer un coeur **ET** une carte noire ». Ceci est impossible car aucune carte ne correspond. Il s'agit donc d'événements incompatibles, ainsi $P(B \cap C) = P(\varnothing) = 0$
- L'événement $B \cup C$ est l'événement « tirer un coeur **OU** tirer une carte noire ». Il y a 8 cartes coeurs ainsi que 16 cartes noires donc

$$\begin{aligned} P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) &= \frac{8}{32} + \frac{16}{32} - 0 \\ &= \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- L'événement $\overline{A}$ est l'événement « Ne pas tirer un roi ». Il y 4 rois dans le jeu de cartes, ainsi

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$$

2/ Définition et premières propriétés

2/1 Définition

Définition

On appelle ____, la probabilité qu'un événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé, on la note $P_A(B)$.

Activité : Le laboratoire pharmaceutique *MACABOU* a réalisé des tests sur 80 000 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	38 000	29 600	67 600
Non guéri	7 000	5 400	13 400
Total	45 000	35 000	80 000

On choisit au hasard un patient et on considère les événements suivants :

A : « Le patient a pris le médicament A. »
B : « Le patient a pris le médicament B. »
G : « Le patient est guéri. »
$\overline{G}$: « Le patient est non guéri. »

1. Calculer : $\mathbf{card}(A), \mathbf{card}(G), \mathbf{card}(G \cap A)$ et $\mathbf{card}(G \cap B)$.

   ____

   ____

2. A l'aide de la question précédente, calculer les quotients $\dfrac{\mathbf{card}(G \cap A)}{\mathbf{card}(G)}$ et $\dfrac{\mathbf{card}(G \cap B)}{\mathbf{card}(B)}$.
3. On choisi maintenant au hasard un **patient guéri**.
   Quelle est la probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant** qu'il est guéri ?

   ____

   ____

4. On choisit maintenant au hasard un **patient ayant pris le médicament B**.
   Quelle est la probabilité que le patient soit guéri **sachant** qu'il a pris médicament B ?

   ____

5. Comparez les réponses des questions 3. et 4. avec les résultats de la question 2. Que remarquez-vous ?

   ____

   ____

Propriétés

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. Alors on a

$$P_A(B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)} = \frac{\text{Nombre d'issues réalisant à la fois } A \text{ et } B}{\text{Nombre d'issues réalisant } A}$$

Exercice nº 1. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on note
- A l'événement « Le résultat est un pique »
- B l'événement « Le résultat est un roi »

Calculer $P_A(B)$, c'est-à-dire la probabilité d'obtenir un roi sachant que l'on a tiré un pique.

Activité : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on note
- A l'événement « Le résultat est un pique »
- B l'événement « Le résultat est un roi »

1. Calculer $P(A)$.

2. Calculer $P(A \cap B)$.

3. On donne $P_A(B) = 0,125$. Calculer $P_A(B) \times P(A)$. Que remarquez vous ?

Propriétés

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Alors on a

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$$

et de façon analogue

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$$

Exercice nº 2. Un laboratoire de recherche met au point un test de dépistage d'une maladie chez une espèce animale et fournit les renseignements suivants : « la population testée comporte 13% d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 95% des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 89% des cas ». On note

— « M » l'événement « l'animal est malade »,
— « T » l'événement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$.
2. Déterminer $P_M(T)$.
3. Déterminer $P_{\overline{M}}(T)$.

Exercice nº 3. Soit le tableau d'effectifs suivant :

	A	$\overline{A}$	Total
B	11		27
$\overline{B}$	14		28
Total		30	

1. Compléter le tableau précédent.
2. Calculer la probabilité $P_B(\overline{A})$.

Exercice nº 4. Lors du test d'un médicament sur 300 personnes, 80 ont reçu sans le savoir un médicament placebo. Les effets secondaires relevés sont les suivants.

	Effets secondaires	Aucun effet secondaire	Total
Médicament	43	177	220
Placebo	18	62	80
Total	61	239	300

On choisit au hasard un participant du test et on note A l'événement « Le patient ressent des effets secondaires » et B l'événement « Le patient a reçu un placebo ».

1. Calculer les probabilités des événements A et B.
2. Calculer et interpréter $P(\overline{B} \cap A)$. Arrondir à 0,01 près.
3. Calculer et interpréter $P(A \cup B)$. Arrondir à 0,01 près.
4. Calculer et interpréter $P_A(B)$, $P_B(\overline{A})$ et $P_{\overline{B}}(\overline{A})$. Arrondir à 0,01 près.

Exercice nº 5. Dans une classe de première, 55% des élèves sont des filles et 40% des élèves sont des filles demi-pensionnaires. On choisit un élève au hasard dans cette classe. Quelle est la probabilité qu'un élève soit demi-pensionnaire sachant que c'est une fille ?

Exercice nº 6. Un club sportif rassemble 180 membres répartis en juniors et seniors. On compte 135 seniors dont 81 hommes. Il y a 27 garçons parmi les juniors.

1. Réaliser un tableau d'effectifs traduisant l'énoncé.
2. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité d'avoir une junior.

3/ Bilan du chapitre

3/1 Rappels et vocabulaire sur les probabilités

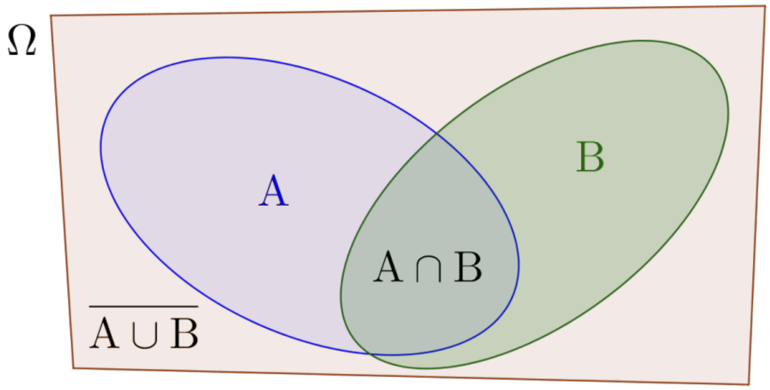

Illustration de $A \cap B$ et $A \cup B$

Ensembles de Ω	**Vocabulaire des événements**	**Propriétés**
A	A est un événement quelconque	$0 \leq P(A) \leq 1$
$\varnothing$	Événement impossible	$P(\varnothing) = 0$
Ω	Événement certain	$P(\Omega) = 1$
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont incompatibles	$P(A \cap B) = 0$
$\overline{A}$	Événement contraire de A	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
A, B	A et B sont deux événements quelconques	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3/2 Tableau croisé et formules à connaitre

	A	$\overline{A}$	Total
B	$\text{card}(A \cap B)$	$\text{card}(\overline{A} \cap B)$	$\text{card}(B)$
$\overline{B}$	$\text{card}(A \cap \overline{B})$	$\text{card}(\overline{A} \cap \overline{B})$	$\text{card}\,(\overline{B})$
Total	$\text{card}(A)$	$\text{card}(\overline{A})$	$\text{card}(\Omega)$

En cas d'équiprobabilité, on a les formules suivantes :

$$P(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)} \qquad P_A(B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)} \qquad P_B(A) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}$$