Chap. 1 : Nombres et arithmétique

Objectifs

- Différents ensemble de nombres
- Développer et factoriser.
- Puissances, diviseurs, nombres premiers

1/ Les ensembles de nombres

1/.1 Les nombres entiers

Définition: (A retenir !)

- Un ____________________ est un nombre entier positif (ou nul).
  L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ et on a $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- Un ___________________ est un nombre entier positif ou négatif (ou nul).
  L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$ et on a $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Notation

★ On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots\}$ et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\} = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$.
★ Pour noter qu'un nombre appartient ou non à un ensemble, on utilise les symboles $\in$ (appartient à) ou $\notin$ (n'appartient pas à)
★ Pour noter qu'un ensemble est inclus ou non dans un autre ensemble, on utilise les symboles $\subset$ (inclus dans) ou $\not\subset$ (n'est pas inclus dans)

Exemples : • $8 \in \mathbb{N}$ • $-3 \notin \mathbb{N}$ • $-2 \in \mathbb{Z}$

Propriétés

Tout nombre entier naturel est aussi un nombre entier relatif, autrement dit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

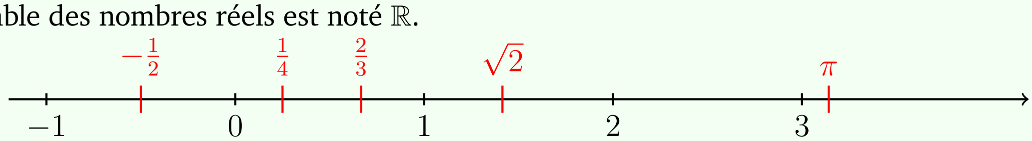
1/.2 Nombres décimaux, nombres rationnels et nombres réels

Définition

- Un _______________ est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est-à-dire $\dfrac{a}{10^k}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

- Un ________________ est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

- Un ___________ est un nombre qui peut être représenté par un point sur une droite graduée.
  L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

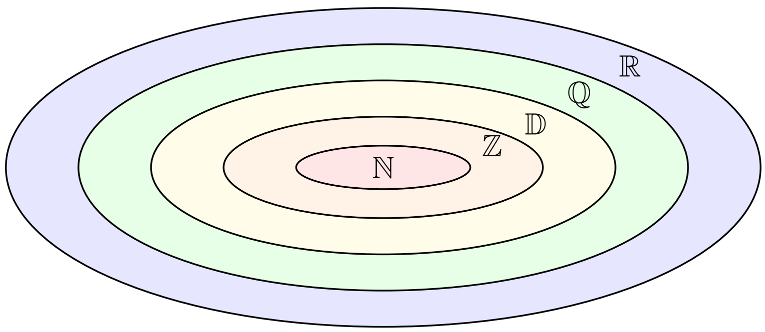


Exemples :

- $0.25 \in \mathbb{D}$
- $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$
- $\dfrac{-2}{3} \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Propriétés

- Tout nombre décimal possède une écriture décimale finie. Et réciproquement, tout nombre qui possède une écriture décimale finie est un nombre décimal.
- Tout nombre entier est un nombre décimal, tout nombre décimal est un nombre rationnel et tout nombre rationnel est un nombre réel. On a les inclusions suivantes $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Activité : Compléter le tableau ci-dessous avec les symboles $\in$ ou $\notin$

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-\dfrac{1}{10}$					
$\dfrac{70}{10}$					
$\sqrt{2}$					
$\sqrt{100}$					
$\dfrac{1}{3}$					
$\dfrac{72}{9}$					
$-\dfrac{50}{4}$					

2/ Calcul littéral

2/.1 Développement, factorisation

Propriétés

Pour tous nombres réels k, a, b, c et d, on a

- $k(a+b) = ka + kb$
- $(a+b)\times(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Illustration :

- $3(x+4) = 3x + 12$
- $(x+2)\times(x+3) = x^2 + 5x + 6$

Propriétés

Pour tout nombres réels a et b, on a

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

3/ Puissances

3/.1 Puissance d'un nombre

Définition

Soient a un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul.

- $a^n = a \times a \times \cdots \times a$
- Si $a \neq 0$, alors $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^0 = 1$

Exemples :

- $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
- $(-3)^4 = (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3) = 81$
- $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$
- $(-4)^0 = 1$

3/.2 Calcul avec les puissances

Propriétés

Soient a et b deux nombres réels et m et n deux nombres entiers relatifs

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^n \times b^n = (ab)^n$
- $(a^m)^n = a^{n\times m}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $a \neq 0$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ si $b \neq 0$

Exemples :

- $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
- $(-3)^2 \times (-3)^5 = (-3)^{2+5} = (-3)^7 = -2187$
- $\dfrac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4 = 625$
- $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1^3}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

3/.3 Écriture scientifique d'un nombre décimal

Propriétés

Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme $a \times 10^n$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{D}$ tel que $-10 < a \leq -1$ ou $1 \leq a < 10$. Cette écriture est appelée **écriture scientifique**.

Exemples :

- $0,00056 = 5,6 \times 10^{-4}$
- $-0,00056 = -5,6 \times 10^{-4}$
- $123456 = 1,23456 \times 10^5$
- $-12300 = -1,23 \times 10^4$

4/ Arithmétique

4/.1 Multiple et diviseurs

Définition

Soient a et b deux nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$. S'il existe un nombre entier relatif q tel que $a = bq$, on dit que a est un _______________ de b et que b est un _______________ de a.

Remarque :

— Lorsque $a = bq$, on dit que a est **divisible par** b ou que b **divise** a.
— b est un diviseur de a lorsque le reste de la **division euclidienne de** a **par** b est égal à 0.

Exemples :

- 12 est un multiple de 3 car $12 = 3 \times 4$.
- -15 est un multiple de 5 car $-15 = 5 \times (-3)$.
- 6 est un diviseur de 18 car $18 = 6 \times 3$.
- -4 est un diviseur de -20 car $-20 = -4 \times 5$.

Définition

Soit a un nombre entier relatif.

- On dit que a est un nombre **pair** si 2 est un diviseur de a. Dans ce cas, il existe un nombre entier relatif n tel que $a = 2n$.
- On dit que a est un nombre **impair** si 2 n'est pas un diviseur de a. Dans ce cas, il existe un nombre entier relatif n tel que $a = 2n + 1$.

Exemples :

- -4 est un nombre pair car 2 divise -4.
- -3 est un nombre impair car 2 ne divise pas -3.
- 0 est un nombre pair car 2 divise 0.
- 1 est un nombre impair car 2 ne divise pas 1.

4/.2 Nombres premiers

Définition

Soit a un nombre entier naturel. Alors a est un **nombre premier** s'il possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

Exemples :
— 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur positif.
— Les nombres premiers sont : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$
— 2 est le seul nombre premier pair, tous les autres nombres premiers sont impairs.

Définition

Soient a et b deux nombres relatifs, avec $b \neq 0$.
- La fraction $\dfrac{a}{b}$ est dite **irréductible** si a et b n'ont pas de diviseur commun autre que 1.
- Tout nombre rationnel possède une écriture irréductible unique.

Exemple On décompose le numérateur et le dénominateur de la fraction en produit de facteurs premiers :

$$\frac{56}{12} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 7}{2 \times 2 \times 3} = \frac{14}{3}$$