

Chap. 7 : Fonctions exponentielles

Objectifs

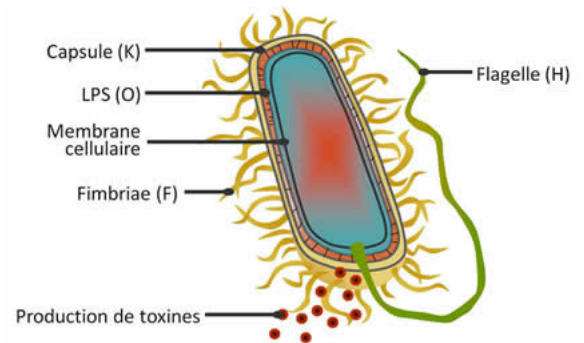
- Les fonctions $x \mapsto a^x$ avec $a > 0$ comme modèle continu d'évolution relative constante
- Définition de la fonction $x \mapsto a^x$ pour $x \geq 0$ comme prolongement à des valeurs non entières positives de la suite géométrique $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$
- Extension des fonctions exponentielles à $\mathbb{R}_-$
- Sens de variation selon les valeurs de a
- Allure de la courbe représentative selon les valeurs de a
- Propriétés algébriques des fonctions exponentielles

1/ Définition de l'exponentielle en base a

Activité n° 1.

Escherichia coli (E. coli) est une bactérie présente dans le microbiote intestinal de l'humain et des animaux. La plupart des souches d'Escherichia coli sont inoffensives, certaines d'entre elles sont pathogènes. Elles vont libérer des toxines induisant majoritairement une lésion de l'endothélium vasculaire (la couche de cellules tapissant les vaisseaux sanguins) intestinal et rénal.

Dans des conditions idéales de température, la bactérie Escherichia coli double toutes les 20 minutes.



On note u_n le nombre de nouvelles bactéries après n fois 20 minutes et on part d'une bactérie

Après 0×20 minutes, on a donc $u_0 = 1$.

Puis après 1×20 minutes, on a $u_1 = 2$ (car chaque nouvelle bactérie double toutes les 20 minutes).

Questions

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) (arithmétique ou géométrique) ? Justifier votre réponse.
2. Écrire le calcul de u_2 puis celui de u_3 , et interpréter ces résultats en termes de bactéries et de minutes (ou d'heures).
3. Donner l'expression de u_n en fonction de n .
4. À l'aide de la question 3., déterminer le nombre de nouvelles bactéries après 6h.
5. Pouvez-vous donner le nombre exact de nouvelles bactéries après 6h et 37 minutes ?
6. La modélisation de l'évolution des bactéries par la suite (u_n) vous semble-t-elle pertinente ?

Définition

Soit a un nombre réel strictement positif.

La est définie pour tout réel positif x par a^x , (autrement dit comme prolongement de la suite géométrique $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$).

Cette définition s'étend aussi aux réels x en posant $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Exercice n° 1. Calculer :

$$16^{0,75} = \dots\dots \quad 243^{0,2} = \dots\dots \quad 27^{1,3} = \dots\dots \quad 2,0736^{\frac{1}{4}} = \dots\dots \quad 125^{\frac{1}{3}} = \dots\dots \quad 25^{-0,5} = \dots\dots$$

Exercice n° 2. Sans calculatrice, trouver la ou les bonnes réponses

- | | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| 1. $16^{\frac{1}{2}} = \dots\dots$ | 2. $27^{\frac{1}{3}} = \dots\dots$ | 3. $2^{10} = \dots\dots$ | 4. $8^{-\frac{2}{3}} = \dots\dots$ |
| a) -4 | a) -3 | a) 10 | a) -4 |
| b) $\frac{1}{4}$ | b) $\frac{6}{2}$ | b) 20 | b) $\frac{1}{4}$ |
| c) 4 | c) 3 | c) 1024 | c) 4 |

2/ Sens de variation et représentation graphique

Activité n° 2. Tracer les fonctions suivantes sur la calculatrice

$$f(x) = 2^x \quad g(x) = 0,5^x \quad h(x) = 3,2^x \quad k(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad p(x) = 4,6^x$$

1. Compléter le tableau suivant

fonction de la forme $x \mapsto a^x$ avec $a > 1$	fonction de la forme $x \mapsto a^x$ avec $a < 1$
Sens de variation	Sens de variation

Propriétés

Soit a un nombre réel strictement positif. Comme la suite géométrique associée, la fonction exponentielle de base a est :

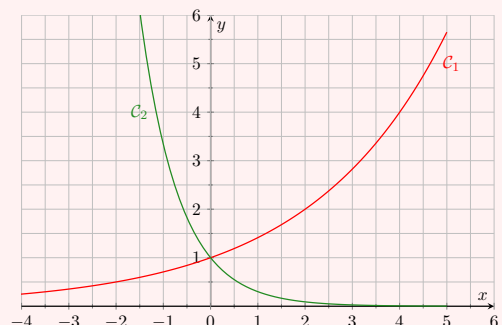
- strictement si
- strictement si

Propriétés

- Pour tout réel $a > 0$ et tout réel x , on a : $a^x > 0$.
- Pour tous réels x et y :
 - Si $a > 1$ alors $a^x < a^y \iff x < y$
 - Si $0 < a < 1$ alors $a^x < a^y \iff x > y$
 - Si $a \neq 1$ alors $a^x = a^y \iff x = y$

Dans le graphe ci-contre

- C_1 représente la courbe de la fonction $x \mapsto 1,414^x$
- C_2 la courbe de la fonction $x \mapsto 0,3^x$



Propriétés

- Si $k > 0$, alors la fonction $x \mapsto ka^x$ a le **même sens de variation** que $x \mapsto a^x$.
- Si $k < 0$, alors la fonction $x \mapsto ka^x$ est de **sens de variation contraire** à $x \mapsto a^x$.

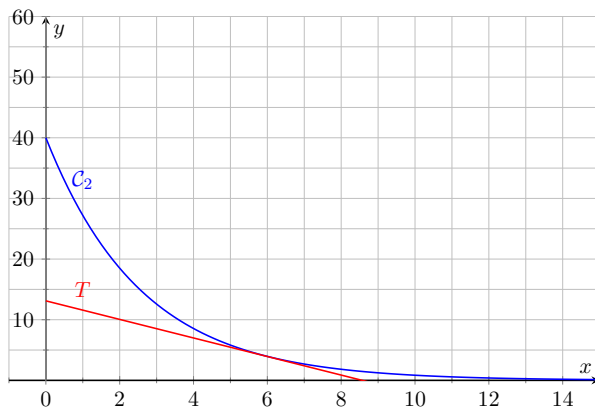
Exercice n° 3. Donner le sens de variation des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$

1. $x \mapsto 3 \times 1,2^x$
2. $x \mapsto 0,5 \times 4^x$
3. $x \mapsto 1,3 \times 0,8^x$
4. $x \mapsto -5 \times 0,4^x$

Exercice n° 4. On injecte à un patient une dose de 40 mg d'anti-inflammatoire. On admet que la quantité d'anti-inflammatoire (en mg) présente dans le sang est donnée par la fonction q définie sur $[0; +\infty[$ par

$$q(t) = 40 \times 0,68^t \quad \text{où } t \text{ est le temps écoulé (en heure) depuis l'injection.}$$

1. Quel est le sens de variation de la fonction q ?
2. On donne la représentation graphique de q ainsi que la tangente T à sa courbe au point d'abscisse 6.



- (a) Indiquer, avec la précision permise par le graphique, la quantité d'anti-inflammatoire présente dans le sang au bout de 2 heures.
- (b) Sachant qu'on peut procéder à une deuxième injection lorsque la quantité d'anti-inflammatoire dans le sang devient inférieure à 2 mg.
Au bout de combien de temps peut-on procéder à une deuxième injection ?
- (c) Reprendre les deux questions précédentes en utilisant la calculatrice graphique.
- (d) Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente T et interpréter ce résultat.

3/ Propriétés algébriques des fonctions exponentielles

Propriétés

Soient a un réel strictement positif, x et y deux réels quelconques et n un entier relatif alors

$$a^{x+y} = a^x \times a^y \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad a^{nx} = (a^x)^n$$

Exercice n° 5. Simplifier les expressions suivantes au maximum

1. $32^{-0,3} \times 32^{0,7}$
2. $\frac{9^{\frac{5}{4}}}{9^{-\frac{1}{4}}}$
3. $2^{3,1} \times 2^{1,4}$
4. $\frac{3,5^{4,8}}{3,5^{3,6}}$
5. $(10^{5,1})^3$
6. $(5^{4,3})^2$

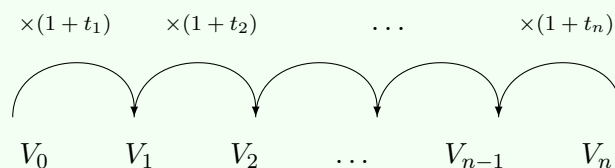
4/ Application au calcul du taux moyen

Activité n° 3. De 2017 à 2020, le coût du Virapic a subi trois augmentations annuelles, de 10%, 1% puis 20%.

- Vérifier que la moyenne arithmétique de 10, 1 et 20 est égale à 10,33.
- Sachant que qu'en 2017, le Virapic coûtait 15€ en pharmacie.
 - Les trois hausses précédentes sont-elles équivalentes à trois hausses successives de 10,33% ?
 - Montrer qu'au cours de ces 3 ans, le prix du Virapic a été multiplié par 1,3332.
 - Résoudre alors l'équation $x^3 = 1,3332$.
- En déduire le taux d'évolution annuel moyen, à 10^{-2} près, correspondant à ces trois hausses.

Définition

- Lors de n évolutions successives à des taux $t_1, t_2, \dots, t_n$ entre une valeur V_0 et une valeur V_n , on appelle le taux noté t_M , qu'il faut appliquer n fois successivement à la valeur V_0 pour obtenir la valeur V_n .



- Le taux moyen t_M est donc tel que :

$$(1 + t_M)^n = (1 + t_1) \times (1 + t_2) \times \dots \times (1 + t_n)$$

Propriétés

- Calculer un taux moyen revient à résoudre une équation du type

$$x^n = C \quad \text{où } C > 0 \text{ est le coefficient multiplicateur global et } n \text{ un entier naturel}$$

- Cette équation a pour solution : $x = C^{\frac{1}{n}}$.

Exercice n° 6. Les dépenses courantes de santé de la Sécurité sociale s'élevaient à 181 424 millions d'euros en 2012 et à 202 404 millions d'euros en 2017 (source : DREES)

- Calculer le taux d'évolution de ces dépenses de 2012 à 2017 à 0,01% près.
- Déterminer le taux d'augmentation annuel moyen correspondant à 0,01% près.

Exercice n° 7. ★ Le corps humain élimine la caféine à un taux de 11% par heure. Par conséquent, la quantité de caféine dans le corps humain x heures après avoir bu une tasse de café peut être modélisée par la fonction $c(x) = k \times a^x$.

Une personne décide de boire une tasse de café contenant 152 mg de caféine.

- Calculer $c(0)$ et en déduire la valeur de k .
- Calculer $c(1)$ et en utilisant l'énoncé, déterminer la valeur de a . Expliquer votre démarche.
- Combien y a-t-il de caféine dans le corps 2h et demi après avoir bu la tasse de café.
- En utilisant la calculatrice**, déterminer au bout de combien de temps exactement **la moitié** de la caféine sera éliminée par le corps ? Donner le résultat en heures et en minutes.

5/ Carte mentale du chapitre

