

Chap. 8 : Variables aléatoires discrètes finies

Objectifs

- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète dans des cas simples et l'interpréter.
- Calculer des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ à l'aide du triangle de Pascal pour $n \leq 10$.
- Reconnaître une situation relevant de la loi binomiale et en identifier le couple de paramètres.
- Interpréter l'événement $\{X = k\}$ sur un arbre de probabilité et calculer les probabilités des événements $\{X = 0\}$, $\{X = 1\}$, $\{X = n\}$, $\{X = n - 1\}$ etc.
- Calculer la probabilité de l'événement $\{X = k\}$ à l'aide des coefficients binomiaux.

1/ Rappels

Définition

- On dit qu'une expérience est lorsqu'on peut la reproduire dans les mêmes conditions et que le résultat, appelé, est imprévisible.
- L'ensemble de toutes les issues possibles est appelé de l'expérience aléatoire.
- On appelle une réunion d'issues.

Définition

Une X est une fonction qui associe un nombre à chaque issue d'une expérience aléatoire.

On dit que la variable aléatoire X est discrète car elle prend un nombre fini n de valeurs, notées $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Exemple : On définit une variable aléatoire X de la façon suivante :

- Si la pièce tombe sur pile, on gagne 5€.
- Si la pièce tombe sur face, on perd 4€.

L'univers ici est $\Omega = \{Pile, Face\}$. La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 5 (lorsque la pièce tombe sur pile) et -4 (lorsque la pièce tombe sur face).

Exercice n° 1. On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. L'ensemble de toutes les issues possible (l'univers) est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. On considère le jeu suivant :

- On doit payer 3€ à chaque partie.
- Si le résultat est 5 ou 6, on gagne 5€.
- Sinon, on perd 1€.

On définit la variable aléatoire X sur $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ donnant le **gain total** en euros.

1. Déterminer les valeurs de la variable aléatoire X en fonction des différentes issues.

Notations

Dans tout ce chapitre, nous utiliserons les notations suivantes :

- $\{X = a\}$ l'ensemble des issues auxquelles on associe la même valeur a .
- $\{X < a\}$ l'ensemble des issues auxquelles on associe une valeur strictement inférieure à a .
- $\{X \leq a\}$ l'ensemble des issues auxquelles on associe une valeur inférieure ou égale à a .
- $\{X > a\}$ l'ensemble des issues auxquelles on associe une valeur strictement supérieure à a .
- $\{X \geq a\}$ l'ensemble des issues auxquelles on associe une valeur supérieure ou égale à a .

Et de même on notera

- $P(X = a)$ la probabilité de l'évènement $\{X = a\}$.
- $P(X < a)$ la probabilité de l'évènement $\{X < a\}$.
- $P(X \leq a)$ la probabilité de l'évènement $\{X \leq a\}$.
- $P(X > a)$ la probabilité de l'évènement $\{X > a\}$.
- $P(X \geq a)$ la probabilité de l'évènement $\{X \geq a\}$.

Exercice n° 2. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

- Si la carte est un cœur, on gagne 5 €.
- Si la carte est un carreau, on gagne 2 €.
- Dans les autres cas, on perd 1 €.

Soit X la variable aléatoire qui associe le gain du jeu. Calculer : $P(X = 5)$, $P(X = -1)$ et $P(X \leq 2)$.

Définition

Définir une d'une variable aléatoire X , c'est associer à chaque valeur x_i de la variable aléatoire X un nombre positif p_i tel que la somme des p_i est égale à 1 :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad \text{avec} \quad p_i = P(X = x_i).$$

On utilisera couramment un tableau afin de décrire la loi de X :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Définition

On appelle d'une variable aléatoire X , le nombre noté $E(X)$ définie par

$$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n$$

$E(X)$ correspond à la moyenne des valeurs x_i prises par X pondérées par leur probabilité p_i .

Exemple : Dans un autre magasin, on distribue des bons d'achat à l'aide d'enveloppes tirées au hasard par les clients. À l'issue de l'expérience aléatoire, on associe la variable aléatoire X correspondant au montant du bon d'achat tiré. On admet que la loi de la probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-contre.

x_i	5	10	50	100
$P(X = x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

On souhaite calculer $P(X < 50)$ et l'espérance $E(X)$.

On obtient $P(X < 50) = P(X = 5) + P(X = 10) = 0,4 + 0,3 = 0,7$.

L'espérance vaut $E(X) = 5 \times 0,4 + 10 \times 0,3 + 50 \times 0,2 + 100 \times 0,1 = 25$.

Cela signifie qu'un client recevra un bon d'achat d'un montant moyen de 25€.

Exercice n° 3. Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	0	10	20	30	40
$P(X = x_i)$	0,3	0,1	0,3	0,2	b

1. Quelle valeur faut-il donner à b pour obtenir une loi de probabilité ? Complétez alors le tableau.
2. Calculer $E(X)$, l'espérance de la variable aléatoire X .

Exercice n° 4. Pour financer leur voyage scolaire, les élèves de TST2S ont organisé une tombola et vendu 400 billets. Le nombre de billets gagnants est résumé dans le tableau ci-dessous :

Gain en euros	100	50	20	10
Nombre de billets	1	2	5	10

Les autres billets sont perdants.

Quelqu'un achète un billet. On note G la variable aléatoire qui, suivant le billet, associe le gain correspondant.

1. Compléter le tableau suivant

Gain g_i	0	10	20	50	100
$P(G = g_i)$					

2. Calculer l'espérance $E(G)$ et interpréter le résultat.
3. Quel est le prix minimum d'un billet de tombola que les élèves devront fixer pour ne pas perdre d'argent ?

Exercice n° 5. Au cours d'un jeu, Diane tire une carte « chance ».

CHANCE

Lancer un dé à six faces.
Si le 6 sort, avancer de 5 cases.
Si c'est le 4 ou le 5, avancer de deux cases.
Dans les autres cas, reculer de trois cases.

1. Réaliser le tableau qui représente la loi de probabilité de la variable aléatoire D .
2. Calculer $E(D)$ et interpréter le résultat.

D est la variable aléatoire, qui, à chaque lancer de dé, associe le déplacement (positif ou négatif).

2/ Découverte de la loi binomiale

Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues appelées « » et « ».

Activité. Un magasin propose à ses clients sa nouvelle carte de fidélité. On suppose que la probabilité p qu'un client l'accepte est de 0,4. Lorsqu'un client se présente à la caisse, il peut l'accepter ou la refuser.

On appelle :

- S le succès « Le client accepte la carte »
- E l'échec « Le client refuse la carte ».

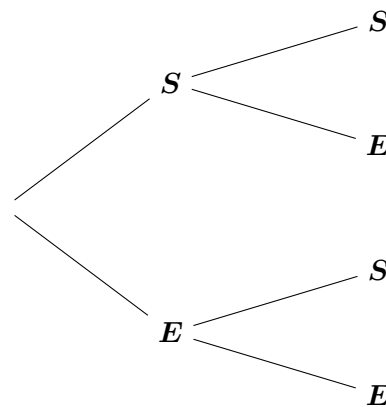
1. Cette expérience aléatoire correspond à une épreuve de Bernoulli. Indiquer son paramètre p .
2. Il y a 2 clients qui se présentent à la caisse. Chacun fait son choix indépendamment des autres. On obtient 2 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour la valeur le nombre de clients qui accepteront la carte.

- (a) Recopier et compléter l'arbre ci-contre.
- (b) Que représente l'évènement $\{X = 0\}$?
Déterminer $P(X = 0)$.
- (c) Recopier et compléter le tableau ci-contre.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$			

- (d) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X .
- (e) Calculer le produit $n \times p$. Quelle remarque pouvez-vous faire ?



Définition: (Loi binomiale)

La répétition de façon identique et indépendante de n épreuves de Bernoulli de paramètre p donne un de paramètres n et p .

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus suit alors la de paramètres n et p .

Propriétés: (Espérance de la loi binomiale)

Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors son espérance vaut :

$$E(X) = n \times p$$

Exercice n° 6. M. LABARRE donne un QCM composé de 3 questions à ses élèves. Il leur propose 2 réponses : l'une est juste et l'autre est fausse. On note :

— J l'événement : « donner une réponse juste » — F l'événement : « donner une réponse fausse ».

On considère qu'un élève répond au hasard et ne se préoccupe pas des réponses précédentes. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de réponses justes.

1. Représenter la situation par un arbre.
2. Reconnaître la loi de probabilité suivie par X et donner ses paramètres.
3. Calculer la probabilité d'avoir exactement 2 réponses justes.
4. Calculer la probabilité d'avoir au moins 2 réponses justes.
5. Quelle note peut espérer un élève ?
6. Cette fois, M. LABARRE donne 8 questions et propose toujours 2 réponses : l'une est juste et l'autre est fausse.

Essayer de réaliser un arbre modélisant la situation. Que remarquez-vous ?

3/ Utilisation des coefficients binomiaux pour la loi binomiale

Définition: (Coefficient binomiaux)

Soit n un entier naturel et k un entier naturel $k \leq n$.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (qui se lit « k parmi n ») est le nombre de chemins correspondant à k succès dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli à n épreuves.

Cas particuliers :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n-1} = n \quad \binom{n}{n} = 1$$

Exercice n° 7.

1. En utilisant un arbre, calculer $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$.
2. En utilisant un arbre, calculer $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$ et $\binom{4}{4}$.

Propriétés: (Triangle de Pascal)

Pour tout n entier naturel $n \geq 2$ et k entier naturel $1 \leq k \leq n$ on a :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

$k \backslash n$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Dans le triangle de Pascal, chaque coefficient (sauf dans la première colonne et la diagonale) s'obtient en ajoutant le coefficient au-dessus de lui avec le coefficient à gauche de ce dernier.

Exemple :

$$\underbrace{\binom{3}{1}}_3 + \underbrace{\binom{3}{2}}_3 = \underbrace{\binom{4}{2}}_6$$

Exercice n° 8. Compléter le Triangle de Pascal suivant

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5								
6								
7								

Exercice n° 9. À l'aide du triangle de Pascal, calculer les coefficients binomiaux suivant

a)

$$\binom{4}{0} = \dots \quad \binom{3}{2} = \dots \quad \binom{4}{4} = \dots$$

b)

$$\binom{6}{0} = \dots \quad \binom{6}{1} = \dots \quad \binom{6}{2} = \dots \quad \binom{6}{3} = \dots \quad \binom{6}{5} = \dots$$

Propriétés: (Loi de probabilité de la loi binomiale)

Soit une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p . Alors pour tout entier naturel $k \leq n$, on a

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Exercice n° 10. On pose X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,25$. Calculer les probabilités suivantes (arrondir les résultats à 0,001.) :

1. $P(X = 3)$

2. $P(X = 2)$

3. $P(X \leq 2)$

Exercice n° 11. Un QCM comporte 20 questions, à chaque question, 3 réponses sont proposées mais une seule est exacte. Kerline répond au hasard à chaque question du QCM.

On note X le nombre de bonnes réponses au QCM.

1. Justifier que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que :

(a) Kerline donne exactement quatorze bonnes réponses.

(b) Kerline donne au moins dix bonnes réponses.

(c) Kerline répond correctement à toutes les questions du QCM.

(d) Kerline ne donne aucune bonne réponse au QCM.

3. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice n° 12. Diane prend le bus chaque matin pour se rendre au lycée. Sur son parcours, il y a 18 arrêts de bus. À chaque fois, la probabilité pour que le bus s'arrête est de 0,75 ce qui lui fait perdre 1 minute. Si le bus ne s'arrête pas, son trajet dure exactement 20 minutes.

On pose X la variable aléatoire qui, à chaque trajet, associe le nombre de fois que le bus s'arrêtera sur le trajet de Diane. On admet que X suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres n et p de la loi de X .
2. Calculer la durée du trajet si le bus effectue exactement 3 arrêts.
3. Calculer la durée du trajet si le bus effectue au maximum 4 arrêts.
4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X . Interpréter le résultat.
5. Déterminer le temps de parcours moyen pour que Diane se rende au lycée.

4/ Bilan du chapitre

