

Chap. 9 : Logarithme décimal

Objectifs

- Définition du logarithme décimal de $b > 0$ comme l'unique solution de l'équation $10^x = b$
- Notation $\log$
- Sens de variation de la fonction logarithme décimal
- Propriétés algébriques : $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$, $\log(a^n) = n \log(a)$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}, a > 0 \text{ et } b > 0$$

1/ Définition de la fonction logarithme décimal

Activité n° 1.

Dans un laboratoire, 1000 bactéries sont mises en culture. Leur population est multipliée par 10 toutes les heures. On modélise cette population par la fonction f définie sur $] -\infty; +\infty[$ par

$$f(x) = 10^x \quad \text{où } x \text{ est en heure et } f(x) \text{ en millier d'individus.}$$



Questions

1. Tracer la fonction $f(x) = 10^x$ sur la calculatrice.
2. Combien il y a-t-il de bactéries après 1h ? 2h ?
3. Au bout de combien de temps (heures et minutes) le nombre de bactéries est égal à 1 000 000 ?
4. Au bout de combien de temps (heures et minutes) le nombre de bactéries est égal à 400 000 ?
5. Peut-on obtenir 100 000 bactéries à des instants différents ? Pourquoi ?

Définition

Soit b un nombre réel strictement positif. L'unique solution de l'équation

$$10^x = b, \quad \text{d'inconnue } x$$

s'appelle le _____, et se note $\log(b)$. On a alors : $x = \log(b)$

Définition

La fonction qui à tout réel $b > 0$, associe l'unique solution de l'équation $10^x = b$ s'appelle la _____. Elle est notée $\log$.

$$\begin{array}{ccc} \log : &]0; +\infty[& \longrightarrow &]-\infty; +\infty[\\ & b & \longmapsto & \log(b) \end{array}$$

Propriétés

- $10^x = b \iff x = \log(b)$
- Pour tout $b > 0$: $10^{\log(b)} = b$
- $\log(10) = 1$ et $\log(1) = 0$

Exercice n° 1. Résoudre les équations suivantes :

$$10^x = 2 \quad 10^x = 0,02 \quad \log(x) = 5$$

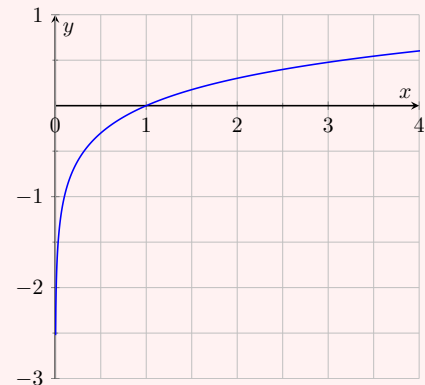
Exercice n° 2. Une souche de la bactérie *Escherichia coli* voit sa population multipliée par 10 toutes les heures. On modélise cette évolution par la fonction p définie par $f(t) = 10^t$, où t est le temps (en heure). À $t = 0$, il y a une bactérie.

1. Déterminer le temps nécessaire pour que la population atteigne les 500 individus. Donner le résultat en heures, minutes et secondes.

2/ Sens de variation et représentation graphique

Propriétés

- La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0; \infty[$
- Pour tout $x > 0$ et tout réel y : $y = \log(x) \iff 10^y = x$
- Pour tous $x > 0$ et $y > 0$:
 - $\log(x) = \log(y) \iff x = y$
 - $\log(x) < \log(y) \iff x < y$
 - $\log(x) > \log(y) \iff x > y$
- $\log(x) < 0 \iff 0 < x < 1$ et $\log(x) > 0 \iff x > 1$



3/ Propriétés algébrique du logarithme décimal

3/1 Calculer avec des logarithmes et des puissances de dix

Activité n° 2. 1. En utilisant la calculatrice , compléter le tableau ci-dessous.

x	10^{-7}	10^{-3}	10^{-2}	100	1 000	10 000	1 000 000
$\log(x)$	...	...	...	...	...	...	...

2. Compléter alors la propriété suivantes : Pour tout entier relatif n , $\log(10^n) = \dots$

- (a) Utiliser la propriété précédente pour compléter le tableau suivant.

a	10	100	1 000	10^{-2}	10^9	10^{-5}
b	100	10 000	10^{-5}	10^6	10^{-3}	10^{-4}
$\log(a) + \log(b)$	...	...	...	...	...	...
$\log(a \times b)$	...	...	...	...	...	...

- (b) Que remarquez-vous ? Cette formule s'appelle la **propriété fondamentale des logarithmes**.

Propriétés

- Pour tout entier relatif n , on a $\log(10^n) = n$
- Pour tout réel x , on a $\log(10^x) = x$
- **Propriété fondamentale des logarithmes**

$$\text{Pour tout } a > 0 \text{ et } b > 0, \quad \log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

Remarque

On dit que le logarithme transforme les produits en sommes.

3/2 Utiliser la propriété fondamentale pour découvrir d'autres propriétés

Activité n° 3. Soient $a > 0$ et $b > 0$.

1. En remarquant que $\log(a^2) = \log(a \times a)$, exprimer les valeurs suivantes en fonction de $\log(a)$.

$$a) \quad \log(a^2) \quad b) \quad \log(a^3) \quad c) \quad \log(a^4) \quad d) \quad \log(a^5)$$

2. Compléter alors la propriété suivantes : pour tout entier naturel n , $\log(a^n) = \dots\dots$

3. En remarquant que $1 = b \times \frac{1}{b}$, calculer $\log\left(\frac{1}{b}\right)$ en fonction de $\log(b)$.

4. En remarquant que $a = b \times \frac{a}{b}$, calculer $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ en fonction de $\log(a)$ et $\log(b)$.

Propriétés

Soient a et b sont deux réels strictement positifs, n un entier naturel et x un réel. Alors on a

$$— \log(a^n) = n \log(a)$$

$$— \log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)$$

$$— \log(a^x) = x \log(a)$$

$$— \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

Exercice n° 3. Écrire A , B et C en n'utilisant que les nombres $\log(2)$ et $\log(3)$

$$A = \log(16) \quad , \quad B = \log(1024) \quad , \quad C = \log(72)$$

Exercice n° 4. Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

$$x^{0,2} = 2048 \quad , \quad 2^x > 3$$

Exercice n° 5. En 2019, la population mondiale est estimée à 7,637 milliards d'habitants. On a remarqué que cette population augmente en moyenne de 1,4% par an. On note (u_n) la suite modélisant la population mondiale en milliard pour l'année $2019 + n$, on a donc $u_n = 7,637 \times 1,014^n$

1. Au cours de quelle année la population mondiale aura-t-elle doublé ?

Exercice n° 6. Le pH (abréviation du terme « potentiel hydrogène ») précise si un milieu est acide, neutre ou basique. L'acidité dépend en effet de la concentration en ions hydronium H_3O^+ qui se calcule en fonction du pH ainsi

$$\left[H_3O^+ \right] = 10^{-\text{pH}}$$

On rappelle que :

- Une solution de $\text{pH} = 7$ est dite neutre.
- Une solution de $\text{pH} < 7$ est dite acide.
- Une solution de $\text{pH} > 7$ est dite basique ou alcaline.

Calculer le pH des liquides suivants et dire s'ils sont neutres, acides ou basiques.

1. Un jus de citron dont la concentration en ionshydronium est de $0,005 \text{ mol.L}^{-1}$
2. Du lait dont la concentration en ions hydronium est de $3,16 \times 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$
3. Du sang humain dont la concentration en ionshydronium est de $4,42 \times 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}$

4/ Carte mentale du chapitre

