

# Chap. 3 : Dérivation

## 1/ Rappels : Nombre dérivé et tangentes

Dans tout ce chapitre, on considèrera une fonction réelle  $f$  définie sur un intervalle réel  $I$  ainsi que deux nombres  $a$  et  $b$  dans  $I$ .

### Définition

Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  distincts, on appelle ..... de  $f$  entre  $a$  et  $b$  le quotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### Définition

Si le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $b$  tend vers un **nombre** lorsque  $b$  tend vers  $a$ , **alors** ce nombre est appelé ..... de  $f$  en  $a$  et se note  $f'(a)$ .

Autrement dit, on a  $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a)$ . En posant  $b - a = h$ , on a aussi  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$

### Définition

**Graphiquement**, lorsque  $h$  tend vers zéro, le point  $B$  se rapproche du point  $A$  et la droite  $(AB)$  tend vers la droite  $T$  appelée ..... au point  $A$ .

Le nombre  $f'(a)$  est le ..... de la .....  $T$  à la courbe représentative de  $f$  au point  $A$  d'abscisse  $a$ .

### Propriétés

Soit  $C_f$  la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie et **dérivable** sur un intervalle  $I$ .

L'équation réduite de la **tangente** en  $a \in I$  de  $f$  est donnée par :

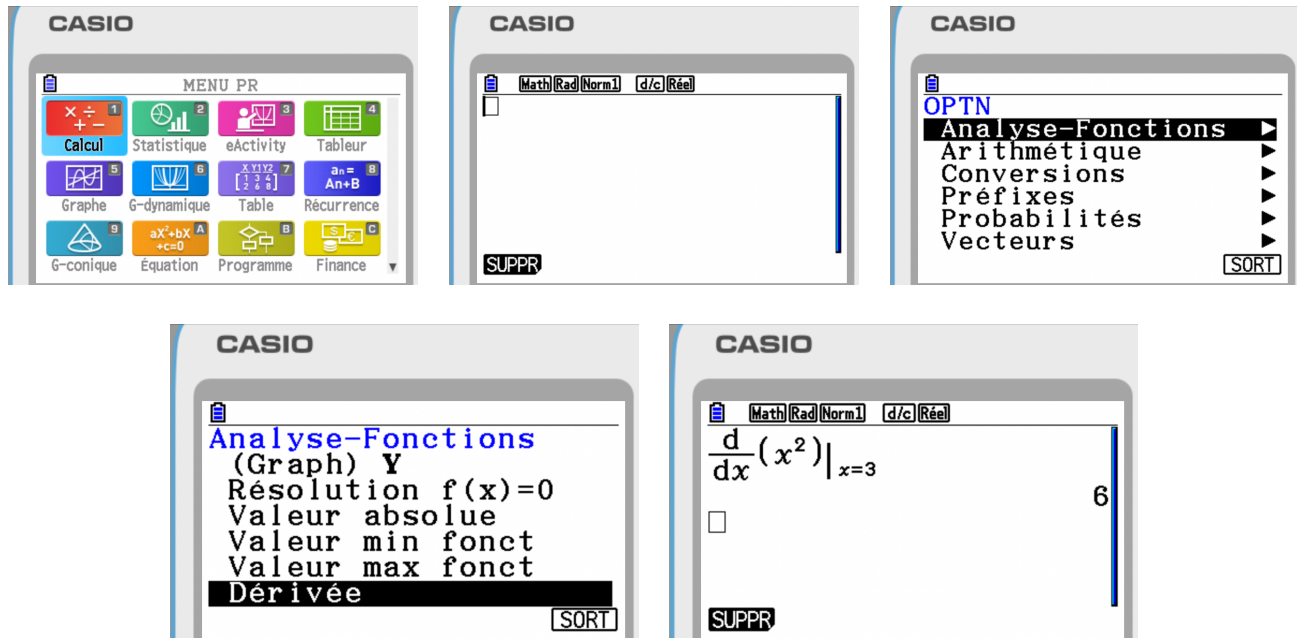
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

## 2/ Fonctions dérivées

### Définition

Une fonction  $f$  est ..... sur un intervalle  $I$ , lorsque pour tout réel  $x$  de  $I$ , le nombre dérivé  $f'(x)$  existe.

**Remarque :** Certaines calculatrice permettent d'accéder au calcul approché d'un nombre dérivé.



### Activité n°1 :

- Soit  $f$  la fonction réelle définie par  $f(x) = x$ 
  - Calculer  $f'(1)$ ,  $f'(2)$ ,  $f'(3)$  et  $f'(4)$
  - Qu'observez vous ?
  - En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \dots\dots$
- Soit  $g$  la fonction réelle définie par  $f(x) = x^2$ .
  - Calculer  $f'(1)$ ,  $f'(2)$ ,  $f'(3)$  et  $f'(4)$
  - Qu'observez vous ?
  - En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \dots\dots$

### Quelques fonctions dérivées connaître

Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ , on a

|           |           |     |       |        |
|-----------|-----------|-----|-------|--------|
| $f(x) =$  | Constante | $x$ | $x^2$ | $x^3$  |
| $f'(x) =$ | 0         | 1   | $2x$  | $3x^2$ |

### Propriétés

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et  $k$  un nombre réel, alors :

- $u + v$  est dérivable sur  $I$  et sa fonction dérivée est la somme des dérivées  $(u + v)'$ .
- $k \times u$  est dérivable sur  $I$  et a pour fonction dérivée :  $k \times u'$ .

Si  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  avec  $a, b, c$  et  $d$  des nombres réels, alors

on a  $f'(x) = a \times 3x^2 + b \times 2x + c \times 1 + 0$

**Exemple :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ .

On calcule  $f'(x)$ , où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ . On obtient  $f'(x) = 3 \times 2x + 5 \times 1 + 0$ .

On réduit l'expression :  $f'(x) = 6x + 5$ .

**Exercice n° 1 :** Déterminer la fonction dérivée pour chacune des fonctions suivantes

1.  $f(x) = 2x + 6$

4.  $u(t) = t^3\sqrt{3} - t^2\sqrt{5} + t\sqrt{7}$

2.  $g(x) = 7x^2 + 23x + 350$

5.  $v(r) = -\frac{3}{7}r + \frac{1}{7} - \frac{3}{14}r^2$

3.  $h(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 1$ .

6.  $w(s) = -2s^2 - 60s + 1000s + \sqrt{51}$

### Théorème

Soit la fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle  $I$  et  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

- La dérivée  $f'$  est **positive** ou nulle sur  $I$  si, et seulement si, la fonction  $f$  est **croissante** sur  $I$ .
- La dérivée  $f'$  est **négative** ou nulle sur  $I$  si, et seulement si, la fonction  $f$  est **décroissante** sur  $I$ .

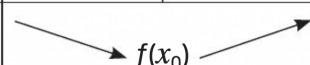
### Définition

On appelle **extremum** (extrema au pluriel) d'une fonction un **maximum** ou un **minimum** de la fonction étudiée.

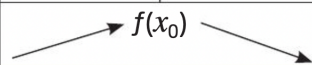
### Propriétés

Soit la fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle  $I$  et  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

- Si la dérivée  $f'$  s'annule en  $x_0$  **en changeant de signe**, alors  $f$  admet un extremum en  $x_0$ .

| $x$     | $x_0$                                                                               |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $f'(x)$ | -   0   +                                                                           |
| $f(x)$  |  |

$f$  admet un minimum en  $x_0$ .  
Ce minimum vaut  $f(x_0)$ .

| $x$     | $x_0$                                                                                |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $f'(x)$ | +   0   -                                                                            |
| $f(x)$  |  |

$f$  admet un maximum en  $x_0$ .  
Ce maximum vaut  $f(x_0)$ .

**Exemple :** On considère la fonction  $f$  est définie et dérivable sur l'intervalle  $[-4; 4]$  par  $f(x) = x^2 - 4x$ .

- On détermine la fonction dérivée de  $f$  :  $f'(x) = 2x - 4$
- On étudie le signe de  $f'(x)$  :  $f'(x) = 0 \iff 2x - 4 = 0 \iff x = 2$

On obtient alors le tableau de variation suivant

| $x$     | -4 | 2 | 4 |
|---------|----|---|---|
| $f'(x)$ | -  | 0 | + |

- On en déduit le tableau de variations de la fonction  $f$ .

On complète la troisième ligne du tableau de la façon suivante

$$f(-4) = (-4)^2 - 4 \times (-4) = 32$$

$$f(2) = (2)^2 - 4 \times 2 = -4$$

$$f(4) = 4^2 - 4 \times 4 = 0$$

La fonction  $f$  admet un minimum en  $x = 2$   
et ce minimum vaut  $-4$ .

| $x$     | -4 | 2  | 4 |
|---------|----|----|---|
| $f'(x)$ | -  | 0  | + |
| $f(x)$  | 32 | -4 | 0 |

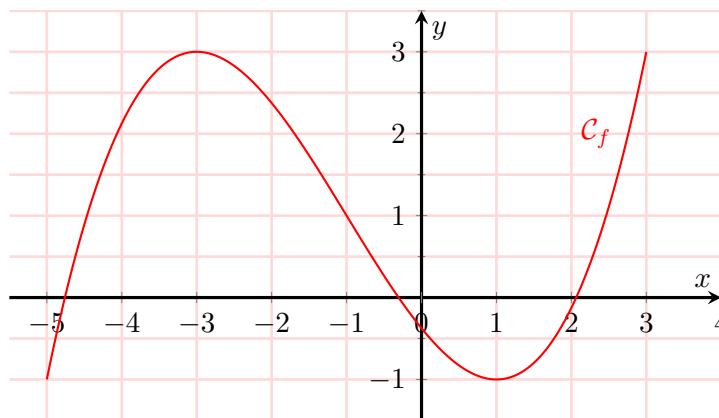
**Exercice n° 2 :** Dans chacun des cas suivants, reproduire et compléter les tableaux de variations.

|         |    |      |   |       |
|---------|----|------|---|-------|
| $x$     | -7 | -1   | 2 | 6     |
| $f'(x)$ |    |      |   |       |
| $f(x)$  | 3  | → -1 |   | 8 → 0 |

|         |         |          |   |                 |
|---------|---------|----------|---|-----------------|
| $x$     | -1      | 0        | 5 | 8               |
| $f'(x)$ |         |          |   |                 |
| $f(x)$  | $f(-1)$ | → $f(0)$ |   | $f(5)$ → $f(8)$ |

|         |   |   |   |    |   |
|---------|---|---|---|----|---|
| $x$     | 2 | 5 | 7 | 10 |   |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0  | + |
| $f(x)$  |   |   |   |    |   |

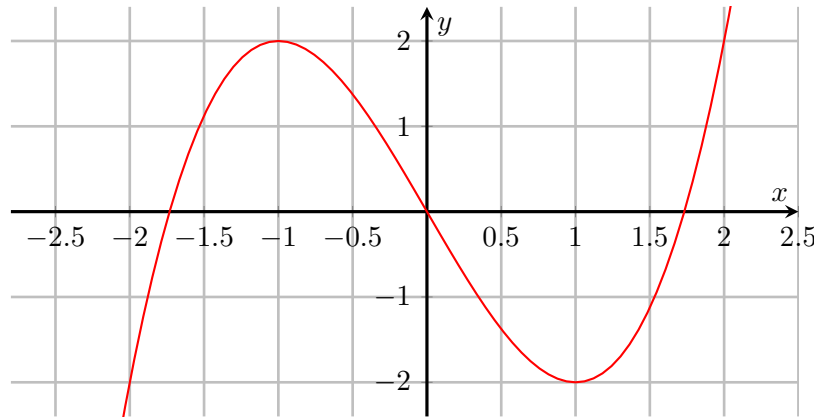
**Exercice n° 3 :** La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction  $f$  définie sur  $[-5; 3]$



1. À partir des informations lues sur le graphique, compléter le tableau de variations suivants .

|         |    |     |     |   |
|---------|----|-----|-----|---|
| $x$     | -5 | ... | ... | 3 |
| $f'(x)$ |    | 0   | 0   |   |
| $f(x)$  |    |     |     |   |

**Exercice n° 4 :** Soit  $f : x \mapsto x^3 - 3x$  dont la courbe représentative est tracée dans le graphique ci-dessous

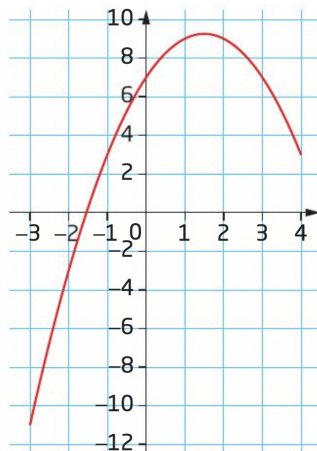


1. Déterminer graphiquement l'abscisse des points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses
2. Calculer  $f'(x)$ .
3. Vérifier par le calcul les résultats trouvés à la question 1.

**Exercice n° 5 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-3; 4]$  par :  
 $f(x) = -x^2 + 3x + 7$

1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Étudier le signe de  $f'(x)$ .
3. En déduire le tableau de variations de  $f$



**Exercice n° 7 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-5; 5]$  par :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Factoriser  $f'(x)$ .
3. Étudier le signe de  $f'(x)$ .
4. En déduire le tableau de variations de  $f$ .

**Exercice n° 6 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 4]$  par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Étudier le signe de  $f'(x)$ .
3. En déduire le tableau de variations de  $f$ .

**Exercice n° 8 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-5; 5]$  par :

$$f(x) = 0,75x^3 - 0,6x^2 + 0,16x + 0,45$$

1. Démontrer que  $f'(x) = (1,5x - 0,4)^2$ .
2. En déduire le signe de  $f'(x)$ .
3. Dresser le tableau de variations de  $f$ .

**Exercice n° 9 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-10; 10]$  par :

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$$

1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Montrer que pour tout réels  $x$  :  
$$f'(x) = 6(x - 2)(x - 1).$$
3. Étudier le signe de  $f'(x)$ .
4. En déduire le tableau de variations de  $f$ .

**Exercice n° 10 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-10; 10]$  par :

$$f(x) = -3x^3 - 22,5x^2 + 54x - 3$$

1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Montrer que pour tout réels  $x$  :  
$$f'(x) = -9(x + 1)(x - 6).$$
3. Étudier le signe de  $f'(x)$ .
4. En déduire le tableau de variations de  $f$ .