

Chap. 2 : Équations et inéquations

Objectifs

- Calcul littéral
- Résoudre des équations et des inéquations
- Intervalles de $\mathbb{R}$ et valeur absolue

1/ Égalités et équations

1/1 Définitions

Propriétés: (A retenir !)

Soient a, b et c trois nombres réels et d un nombre réel non nul.

- $a = b \iff a + c = b + c$
- $a = b \iff a \times d = b \times d$
- $a = b \iff a - c = b - c$
- $a = b \iff \frac{a}{d} = \frac{b}{d}$
- $a = b$ et $c = d$ alors $a + c = b + d$

Remarque : Le symbole $\iff$ se lit « équivaut à », cela signifie qu'une propriété est vraie si et seulement si l'autre est vraie.

Exemples :

$$3x = 7 \iff 5 \times 3x = 5 \times 7 \iff 15x = 35$$

$$4x = 160 \iff \frac{4}{5}x = \frac{160}{5} \iff \frac{4}{5}x = 32$$

Propriétés

Un produit est nul si et seulement si l'un (au moins) de ses facteurs est nul. Autrement dit, pour tous nombres réels a et b :

$$a \times b = 0 \iff (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

Exemple :

$$(x - 3)(8 + x) = 0 \iff x - 3 = 0 \text{ ou } 8 + x = 0$$

$$\iff x = 3 \text{ ou } x = -8$$

1/2 Équations

Définition

- Une équation d'inconnue x est une égalité qui peut être pour certaines valeurs de x et pour d'autres.
- Une solution d'une équation est un pour lequel l'égalité est

Exemple : L'équation $-6x + 3 = 15$ a pour solution -2 car $-6 \times (-2) + 3 = 12 + 3 = 15$.

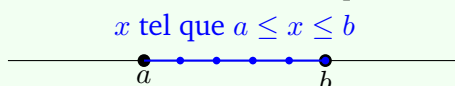
Définition

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation d'inconnue x c'est trouver pour lesquels l'égalité est vraie.

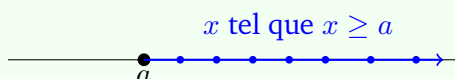
2/ Intervalles et valeur absolue**2/1 Les intervalles de $\mathbb{R}$** **Définition**

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.

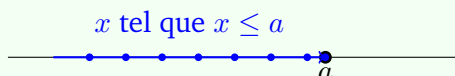
- L'intervalle $[a; b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.



- L'intervalle $[a; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq a$.



- L'intervalle $] - \infty; a]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leq a$.



- L'intervalle $] - \infty; +\infty[$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les nombres réels.

**Notation**

- Le symbole $\leq$ signifie « inférieur ou égal ».
- Les réels a et b ainsi que $-\infty$ et $+\infty$ s'appellent les de l'intervalle.
- Pour une borne d'un intervalle, on utilise un crochet ouvert. Par exemple $]a; b]$.

Exemples :

- l'intervalle $]2; 5]$ représente l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $2 < x \leq 5$
- l'intervalle $[4; 11[$ représente l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $4 \leq x < 11$
- l'intervalle $] - 2; 19[$ représente l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $-2 < x < 19$

2/2 Valeur absolue d'un nombre réel**Définition**

Soit x un nombre réel. On appelle, notée $|x|$, le nombre défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Autrement dit, la valeur absolue d'un nombre réel est valeur du nombre distance à 0 sur la droite des réels.

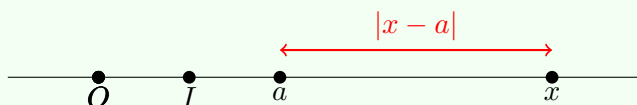
Remarque : La valeur absolue d'un nombre réel c'est simplement la valeur du nombre sans son signe.

Exemples :

- $|3| = 3$
- $|-5| = 5$
- $|0| = 0$
- $|-2,7| = 2,7$

Définition

Soit a et x des nombres réels. On appelle entre les nombres x et a , le nombre $|x - a|$. Cette distance est aussi égale à $|a - x|$.



Exemples : La distance entre les nombres -5 et 4 est $|-5 - (4)| = |-9| = 9$.

3/ Inégalités et inéquations

3/1 Propriétés des inégalités

Propriétés: (Admise)

Soient a , b et c des nombres réels et d un nombre réel non nul.

- $a < b \iff a + c < b + c$ et $a - c < b - c$
- Si $d > 0$ alors $a < b \iff a \times d < b \times d$ et $\frac{a}{d} < \frac{b}{d}$
- Si $d < 0$ alors $a < b \iff a \times d > b \times d$ et $\frac{a}{d} > \frac{b}{d}$

Remarque

On a les mêmes équivalences si les inégalités sont larges, c'est à dire si on remplace le symbole $<$ par $\leq$ ou le symbole $>$ par $\geq$.

Propriétés

Soient a , b , c et d des nombres réels.

$$\text{Si } a < b \quad \text{et} \quad c < d \quad \text{alors} \quad a + c < b + d$$

3/2 Inéquations

Définition

- Une inéquation d'inconnue x est une inégalité qui peut être pour certaines valeurs de x et pour d'autres.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation d'inconnue x , c'est trouver l'ensemble des nombres pour lesquels l'inégalité est vraie.

Exemples : -2 est solution de l'inéquation $-6x + 3 < 15$ car $-6 \times (-2) + 3 = 12 + 3 = 15$.