

# Chap. 9 : Variables aléatoires et loi de Bernoulli

## Objectifs

- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète dans des cas simples et l'interpréter.
- Loi de probabilité.
- Reconnaître une situation relevant de la loi de Bernoulli et en identifier le paramètre.
- Interpréter l'événement  $\{X = k\}$  sur un arbre de probabilité et calculer les probabilités des événements  $\{X = 0\}$ ,  $\{X = 1\}$ ,  $\{X = n\}$ ,  $\{X = n - 1\}$  etc.

## 1/ Rappels

### Définition

- On dit qu'une expérience est ..... lorsqu'on peut la reproduire dans les mêmes conditions et que le résultat, appelé ....., est imprévisible.
- L'ensemble de toutes les issues possibles est appelé ..... de l'expérience aléatoire.
- On appelle ..... une réunion d'issues.

### Définition

Une .....  $X$  est une fonction qui associe un nombre à chaque issue d'une expérience aléatoire.

On dit que la variable aléatoire  $X$  est discrète car elle prend un nombre fini  $n$  de valeurs, notées  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Exemple :** On définit une variable aléatoire  $X$  de la façon suivante :

- Si la pièce tombe sur pile, on gagne 5€.
- Si la pièce tombe sur face, on perd 4€.

L'univers ici est  $\Omega = \{Pile, Face\}$ . La variable aléatoire  $X$  peut prendre les valeurs 5 (lorsque la pièce tombe sur pile) et  $-4$  (lorsque la pièce tombe sur face).

### Notations

Dans tout ce chapitre, nous utiliserons les notations suivantes :

- $\{X = a\}$  l'ensemble des issues auxquelles on associe la même valeur  $a$ .
- $\{X < a\}$  l'ensemble des issues auxquelles on associe une valeur strictement inférieure à  $a$ .
- $\{X \leq a\}$  l'ensemble des issues auxquelles on associe une valeur inférieure ou égale à  $a$ .
- $\{X > a\}$  l'ensemble des issues auxquelles on associe une valeur strictement supérieure à  $a$ .
- $\{X \geq a\}$  l'ensemble des issues auxquelles on associe une valeur supérieure ou égale à  $a$ .

Et de même on notera

- $P(X = a)$  la probabilité de l'évènement  $\{X = a\}$ .
- $P(X < a)$  la probabilité de l'évènement  $\{X < a\}$ .
- $P(X \leq a)$  la probabilité de l'évènement  $\{X \leq a\}$ .
- $P(X > a)$  la probabilité de l'évènement  $\{X > a\}$ .
- $P(X \geq a)$  la probabilité de l'évènement  $\{X \geq a\}$ .

### Définition

Définir une ..... d'une variable aléatoire  $X$ , c'est associer à chaque valeur  $x_i$  de la variable aléatoire  $X$  un nombre positif  $p_i$  tel que la somme des  $p_i$  est égale à 1 :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad \text{avec} \quad p_i = P(X = x_i).$$

On utilisera couramment un tableau afin de décrire la loi de  $X$  :

|              |       |       |         |       |
|--------------|-------|-------|---------|-------|
| $x_i$        | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
| $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ |

### Définition

On appelle ..... d'une variable aléatoire  $X$ , le nombre noté  $E(X)$  définie par

$$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n$$

$E(X)$  correspond à la moyenne des valeurs  $x_i$  prises par  $X$  pondérées par leur probabilité  $p_i$ .

## 2/ Découverte de la loi de Bernoulli

### Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues appelées « ..... » et « ..... ».

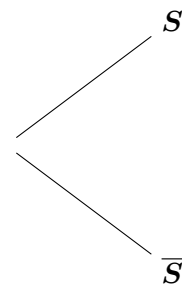
### Définition

Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ , on notera  $X = 1$  si l'évènement "succès" se réalise et  $X = 0$  si l'évènement "succès" ne se réalise pas.

**Activité.** Un jour de fléchettes touche le centre de la cible avec une probabilité égale à 0,7. Il effectue un lancer. On note  $S$  l'évènement "le joueur touche la cible" et on définit la variable aléatoire  $X$  qui prend la valeur

- 1 si le joueur touche le centre de la cible (succès)
- 0 dans les autres cas (échec)

1. Expliquer pourquoi cette expérience aléatoire correspond à une épreuve de Bernoulli et indiquer le paramètre.
2. Recopier et compléter l'arbre ci-contre.
3. Que représente l'évènement  $\{X = 1\}$ ? Déterminer  $P(X = 1)$ .
4. Que représente l'évènement  $\{X = 0\}$ ? Déterminer  $P(X = 0)$ .
5. Recopier et compléter le tableau ci-contre.



|              |   |   |
|--------------|---|---|
| $x_i$        | 0 | 1 |
| $P(X = x_i)$ |   |   |

6. Calculer l'espérance  $E(X)$  de la variable aléatoire  $X$ .

### Propriétés: (Loi et espérance de la loi de Bernoulli)

Si une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  alors la loi de probabilité est donnée par

|              |         |     |
|--------------|---------|-----|
| $x_i$        | 0       | 1   |
| $P(X = x_i)$ | $1 - p$ | $p$ |

et l'espérance de la variable aléatoire  $X$  vaut  $E(X) = p$

### Définition: (Répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes)

La répétition de façon identique et indépendante de  $n$  épreuves de Bernoulli de paramètre  $p$  donne un ..... de paramètres  $n$  et  $p$  que l'on peut représenter par un arbre de probabilités.

On peut ainsi définir la variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre de succès lors de la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli.