

Chap. 2 : Dérivation

1/ Rappels : Nombre dérivé et tangentes

Dans tout ce chapitre, on considèrera une fonction réelle f définie sur un intervalle réel I ainsi que deux nombres a et b dans I .

Définition

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées possède une de la forme

$$y = mx + p$$

— le nombre m s'appelle le de (D) et est donnée par $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

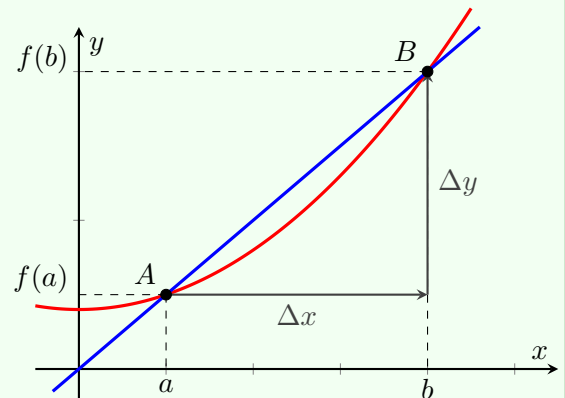
— p s'appelle C'est la valeur de la droite au point d'abscisse 0.

Définition

Pour tous nombres réels a et b distincts, on appelle de f entre a et b le quotient

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ce nombre m correspond au **coefficient directeur de la droite** passant par les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ et permet de décrire la **variation moyenne** d'une fonction sur $[a; b]$

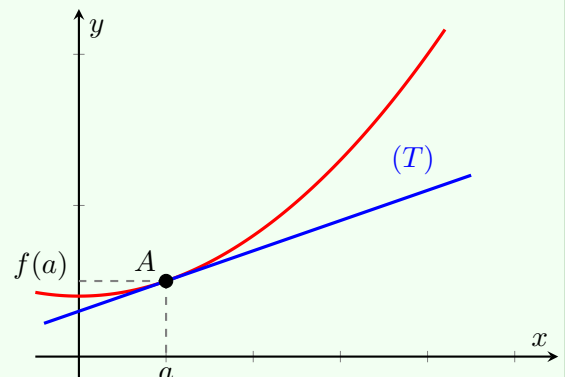


Définition

Si le taux de variation de f entre a et b tend vers un **nombre** lorsque b tend vers a , **alors** ce nombre est appelé de f en a et se note $f'(a)$.

Graphiquement, lorsque h tend vers zéro, le point B se rapproche du point A et la droite (AB) devient la au point A .

Le nombre $f'(a)$ est le de la T à la courbe représentative de f au point A d'abscisse a .



Propriétés

Soit C_f la courbe représentative d'une fonction f définie et **dérivable** sur un intervalle I .

L'équation réduite de la **tangente** en $a \in I$ de f est donnée par :

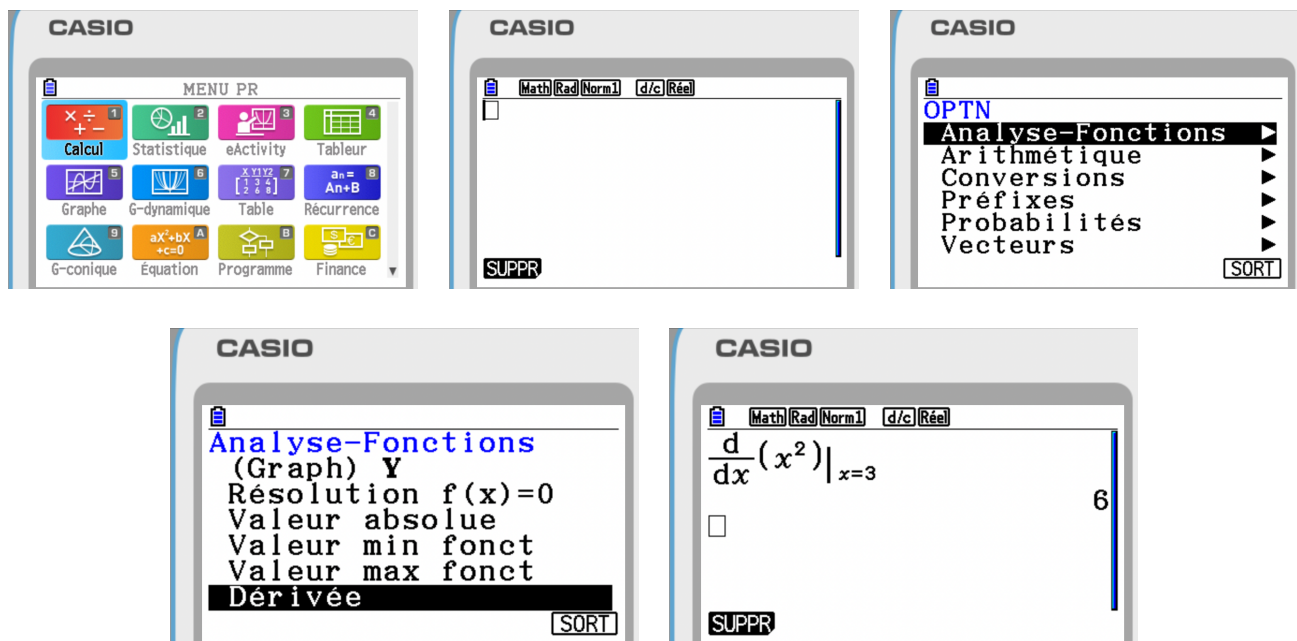
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

2/ Fonctions dérivées

Définition

Une fonction f est dite ----- sur un intervalle I , lorsque pour tout réel x de I , le nombre dérivé $f'(x)$ existe.

Remarque : Certaines calculatrices permettent d'accéder au calcul approché d'un nombre dérivé.



Activité n°1 :

- Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = x$
 - Calculer $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$ et $f'(4)$
 - Qu'observez-vous ?
 - En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dots\dots$
- Soit g la fonction réelle définie par $f(x) = x^2$.
 - Calculer $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$ et $f'(4)$
 - Qu'observez-vous ?
 - En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dots\dots$

Quelques fonctions dérivées connaître

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$f(x) =$	Constante	x	x^2	x^3
$f'(x) =$	0	1	$2x$	$3x^2$

Propriétés

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre réel, alors :

- $u + v$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est la somme des dérivées $(u + v)'$.
- $k \times u$ est dérivable sur I et a pour fonction dérivée : $k \times u'$.

Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d des nombres réels, alors

on a $f'(x) = a \times 3x^2 + b \times 2x + c \times 1 + 0$

Exercice n° 1 : Déterminer la fonction dérivée pour chacune des fonctions suivantes

- $f(x) = 2x + 6$
- $g(x) = 7x^2 + 23x + 350$
- $h(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 1.$
- $u(t) = t^3\sqrt{3} - t^2\sqrt{5} + t\sqrt{7}$
- $v(r) = -\frac{3}{7}r + \frac{1}{7} - \frac{3}{14}r^2$
- $w(s) = -2s^2 - 60s + 1000s + \sqrt{51}$

Théorème

Soit la fonction f définie et dérivable sur un intervalle I et f' la fonction dérivée de f .

- La dérivée f' est **positive** ou nulle sur I si, et seulement si, la fonction f est **croissante** sur I .
- La dérivée f' est **négative** ou nulle sur I si, et seulement si, la fonction f est **décroissante** sur I .

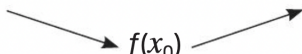
Définition

On appelle **extremum** (extrema au pluriel) d'une fonction un **maximum** ou un **minimum** de la fonction étudiée.

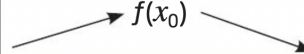
Propriétés

Soit la fonction f définie et dérivable sur un intervalle I et f' la fonction dérivée de f .

- Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum en x_0 .

x	x_0
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	

f admet un minimum en x_0 .
Ce minimum vaut $f(x_0)$.

x	x_0
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	

f admet un maximum en x_0 .
Ce maximum vaut $f(x_0)$.

Exemple : On considère la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$ par $f(x) = x^2 - 4x$.

- On détermine la fonction dérivée de f : $f'(x) = 2x - 4$
- On étudie le signe de $f'(x)$: $f'(x) = 0 \iff 2x - 4 = 0 \iff x = 2$

On obtient alors le tableau de variation suivant

x	-4	2	4
$f'(x)$	-	0	+

- On en déduit le tableau de variations de la fonction f .

On complète la troisième ligne du tableau de la façon suivante

$$f(-4) = (-4)^2 - 4 \times (-4) = 32$$

$$f(2) = (2)^2 - 4 \times 2 = -4$$

$$f(4) = 4^2 - 4 \times 4 = 0$$

La fonction f admet un minimum en $x = 2$
et ce minimum vaut -4 .

x	-4	2	4
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	32	$\searrow$ -4 $\nearrow$	0

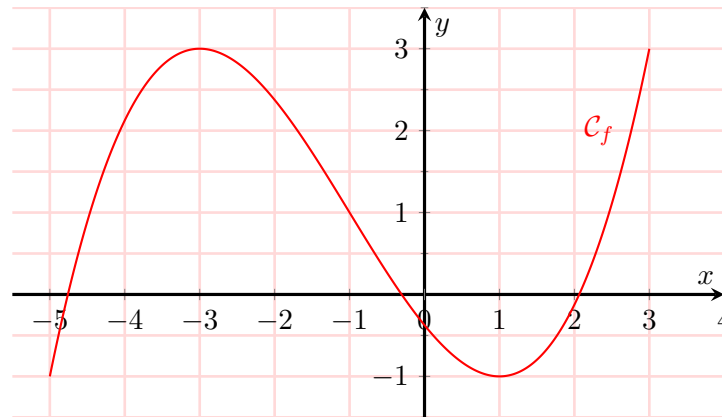
Exercice n° 2 : Dans chacun des cas suivants, reproduire et compléter les tableaux de variations.

x	-7	-1	2	6
$f'(x)$				
$f(x)$	3	$\searrow$ -1 $\nearrow$	8	$\searrow$ 0

x	-1	0	5	8
$f'(x)$				
$f(x)$	$f(-1)$	$\searrow$ $f(0)$ $\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$ $f(8)$

x	2	5	7	10	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

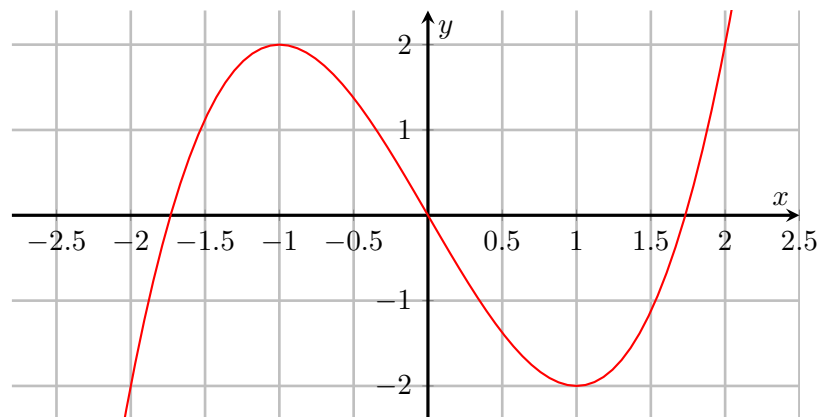
Exercice n° 3 : La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-5; 3]$



1. À partir des informations lues sur le graphique, compléter le tableau de variations suivants .

x	-5	...	...	3
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$				

Exercice n° 4 : Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x$ dont la courbe représentative est tracée dans le graphique ci-dessous

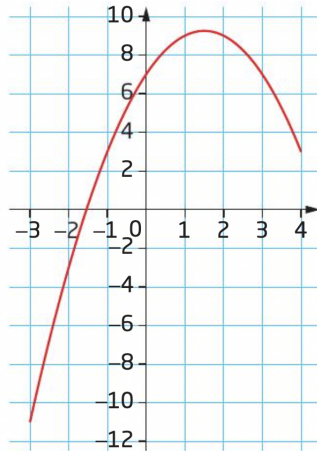


- Déterminer graphiquement l'abscisse des points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses
- Calculer $f'(x)$.
- Vérifier par le calcul les résultats trouvés à la question 1.

Exercice n° 5 :

Soit f la fonction définie sur $[-3; 4]$ par :
 $f(x) = -x^2 + 3x + 7$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de f .

**Exercice n° 7 :**

Soit f la fonction définie sur $[-5; 5]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Factoriser $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. En déduire le tableau de variations de f .

Exercice n° 9 :

Soit f la fonction définie sur $[-10; 10]$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que pour tout réels x :
 $f'(x) = 6(x - 2)(x - 1)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. En déduire le tableau de variations de f .

Exercice n° 6 :

Soit f la fonction définie sur $[0; 4]$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de f .

Exercice n° 8 :

Soit f la fonction définie sur $[-5; 5]$ par :

$$f(x) = 0,75x^3 - 0,6x^2 + 0,16x + 0,45$$

1. Démontrer que $f'(x) = (1,5x - 0,4)^2$.
2. En déduire le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f .

Exercice n° 10 :

Soit f la fonction définie sur $[-10; 10]$ par :

$$f(x) = -3x^3 - 22,5x^2 + 54x - 3$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que pour tout réels x :
 $f'(x) = -9(x + 1)(x - 6)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. En déduire le tableau de variations de f .