

Chap. 1 : Suites arithmétiques et géométriques

Objectifs

- Suite arithmétique/géométrique et expression en fonction de n
- Somme des n premiers termes d'une suite
- Notation $\sum$
- Moyenne arithmétique de 2 nombres
- Moyenne géométrique de deux nombres positifs

1/ Rappels

On retrouve les **suites numériques** dans de nombreux domaines :

- **Financier** : avec le calcul des mensualités dues à un crédit, des intérêts liés à un placement, l'évolution de la valeur d'un bien ou d'une action ;
- **Scientifique** : avec l'étude d'évolution de population, de la désintégration de substances radioactives, modélisation de phénomènes etc.

2/ Définition d'une suite arithmétique

Définition

Une **suite numérique** est une qui, à tout **entier naturel** n ($n = 0, 1, 2, \dots$), associe un nombre réel **noté** $u(n)$ ou u_n . On parle du terme de n de la suite.

Ainsi une suite est : On la note u ou (u_n) .

Définition: (A retenir !)

Lorsque l'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre réel** a , on dit que la suite est

Une suite arithmétique de raison a est définie par la **relation de récurrence** :

$$u(n+1) = u(n) + a \quad \text{et le terme initial}$$

On écrit aussi

$$u_{n+1} = u_n + a$$

Le terme initial peut être $u(0)$ de rang 0 ou $u(1)$ de rang 1. Une suite arithmétique est **représentée par des points alignés**. On parle de

Exemple : $u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 100$. Cette suite est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 100$.

Exercice n° 1. : Calculer les 10 premiers termes des suites suivantes :

1. $u_{n+1} = u_n + 2$ et $u_0 = 4$

2. $u_{n+1} = u_n + 5$ et $u_0 = 1$

3. $u_{n+1} = u_n - 1$ et $u_0 = 20$

4. $u_{n+1} = u_n - 13$ et $u_0 = 0$

5. $u_{n+1} = u_n$ et $u_0 = 4$

6. $u_{n+1} = u_n - 100$ et $u_0 = 1000$

Exercice n° 2. : La suite u est arithmétique de raison 10 et de terme initial $u_0 = 0$. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

3/ Propriétés d'une suite arithmétique

Théorème: (Sens de variation d'une suite arithmétique de raison a)

Soit u une suite arithmétique de raison a , c'est à dire de la forme

$$u_{n+1} = u_n + a \quad \text{et le terme initial}$$

- Si $a > 0$ alors la suite arithmétique u est
- Si $a < 0$ alors la suite arithmétique u est
- Si $a = 0$ alors la suite arithmétique u est

Exercice n° 3. : On désire calculer les termes de n'importe quelle suite arithmétique de raison a et de terme initial u_0 à l'aide d'un tableur.

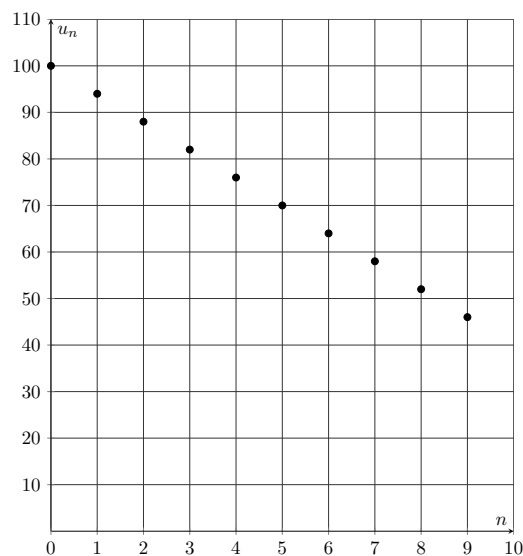
1. Lucas propose le tableur ci-contre pour la suite arithmétique de raison -6 , et de terme initial 100

	A	B	C
1	n	Un	raison
2	0	= 100	= -6
3	1	= B2 + \$C\$2	
4	2	=	
5	3	=	
6	4	=	
7	5	=	

- (a) Que permet le symbole \$ dans la formule saisie en B3 ? Que devient la formule en B4 par recopie vers le bas ? Quel sera le résultat obtenu en B7 ?

2. Cette suite est représentée ci-après.

- (a) Quel est son sens de variation ? Pourquoi parle-t-on de croissance **linéaire** ?
- (b) Déterminer l'équation réduite de la droite passant par ses points.



Activité n° 1. Pour s'acheter un scooter électrique à 850 €, Wendy a une somme initiale de 50 € et économise chaque semaine les 40€ qu'elle gagne en donnant des cours de mathématiques.

On appelle (u_n) le montant (en €) économisé la n -ième semaine et on note $u_0 = 50$.

1. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
2. Calculer u_1, u_2 et u_3 .
3. Déterminer la nature de la suite (croissante ? décroissante) ?.
4. On cherche un lien entre n et u_n afin de calculer rapidement tous les termes jusqu'à obtenir 850.
 - (a) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n
 - (b) Selon cette formule, au bout de combien de semaine Wendy pourra-t-elle acheter son scooter électrique ?

Propriétés: (A retenir)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- i) Si le premier terme de la suite est $u_0 \in \mathbb{R}$ alors pour tout entier naturel n , on a

$$u_n = u_0 + nr$$

- ii) Si le premier terme de la suite est $u_1 \in \mathbb{R}$ alors pour tout entier naturel n , on a

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

Exercice n° 4. : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 2$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Déterminer alors u_{50} et u_{65} .

Exercice n° 5. : Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 10$ et $u_{n+1} = u_n - 6$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Déterminer alors u_{30} et u_{101} .

Activité n° 2. : On considère une suite arithmétique (u_n) de raison inconnue mais dont on connaît quelques termes

n	10	11	12	13	14	15	16
u_n	13	...	18	...	...	...	28

1. Déterminer la raison de cette suite puis compléter le tableau.
2. Comment déterminer la valeur de u_{11} à partir de u_{13} et u_{10} ?
3. Plus généralement, si on connaît u_n et u_{n+2} , montrer que $u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$.

Propriétés

Trois nombres x, y et z sont des termes d'une suite

..... si la moyenne arithmétique du plus petit et du plus grand est égale au

..... Autrement dit

$$y = \frac{x + z}{2}$$

Activité n° 3. : On veut exprimer simplement la somme des n premiers entiers naturels

$$S_n = \sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$$

1. Compléter le tableau suivant



S_n	=	0	+	1	+	2	+	...	$n-2$	+	$n-1$	+	n
S_n	=	n	+	$n-1$	+	$n-2$	+	...	2	+	1	+	0
$S_n + S_n = 2S_n$	=	...	+	...	+	...	+	...	...	+	...	+	...

2. En déduire l'expression de $2S_n$ en fonction de n puis celle de S_n en fonction de n .

Propriétés: (Calcul d'une somme de termes d'une suite arithmétique)

Pour tout entier naturel n , on a

$$\sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Et si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , on a

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$$

Plus simplement, la formule générale à retenir est

$$\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \times (\text{nombre de terme})$$

Exercice n° 6. : On considère la suite arithmétique (u_n) telle que $u_0 = 5$ et $u_{14} = 39$

1. Déterminer le nombre de termes entre u_0 et u_{14} .

2. Calculer $S = \sum_{i=0}^{14} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_{14}$

Exercice n° 7. : Chaque somme S est la somme de termes successifs d'une suite arithmétique (u_n) .

Calculer S dans chacun des cas suivants

a. $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 202$

b. $S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 202$

c. $S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 201$

Exercice n° 8. : Vrai ou Faux. Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. La moyenne arithmétique de $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ est égale à $\frac{1}{4}$

2. le terme générale d'une suite arithmétique (u_n) de raison 5 et de premier terme $u_0 = -3$ est $u_n = 5 - 3n$.

3. Une suite arithmétique (v_n) de raison -3 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$ a pour terme général $v_n = \frac{1}{3}n - 3$.

4. Si (w_n) est une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $w_0 = 7$ alors $w_{10} = -13$.

4/ Définition d'une suite géométrique

Définition: (A retenir!)

Lorsque l'on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par le même nombre réel q** , on dit que la suite est

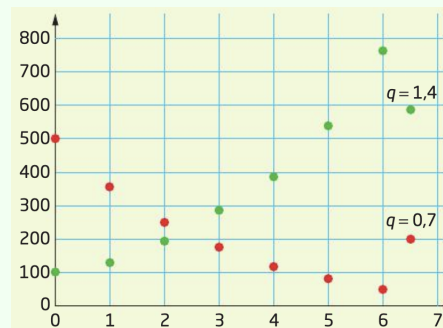
Une suite géométrique de raison q est définie par la **relation de récurrence** :

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{et le terme initial}$$

Le terme initial peut être u_0 de rang 0 ou u_1 de rang 1.

Une suite géométrique modélise une grandeur ayant un taux d'évolution constant.

On parle de



Exemple : Une suite u est définie par $u_{n+1} = 5u_n$ et $u_0 = 6$.

Cette suite est géométrique de raison 5, car la relation de récurrence est de la forme $u_{n+1} = q \times u_n$ avec $q = 5$.

Exercice n° 9. Calculer les 10 premiers termes des suites suivantes :

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $u_{n+1} = 2u_n$ et $u_0 = 4$ | 4. $u_{n+1} = 9u_n$ et $u_0 = 0$ |
| 2. $u_{n+1} = 6u_n$ et $u_0 = 1$ | 5. $u_{n+1} = u_n$ et $u_0 = 4$ |
| 3. $u_{n+1} = -3u_n$ et $u_0 = 20$ | 6. $u_{n+1} = -4u_n$ et $u_0 = -1$ |

Exercice n° 10. : La suite u est la suite géométrique de raison 10 et de terme initial $u_0 = 2$.

Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

5/ Propriétés d'une suite géométrique

Théorème: (Sens de variation d'une suite géométrique de raison q)

Soit u une suite géométrique de raison q , c'est à dire de la forme

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{et le terme initial}$$

- Si $q > 1$ alors la suite géométrique u est
- Si $0 < q < 1$ alors la suite géométrique u est

Activité n° 4. La soeur d'Anglise vient d'avoir un enfant. Afin de l'aider financièrement lorsqu'elle sera plus grande, Anglise dépose une somme initiale de 2000 € le compte en banque de sa nièce. Chaque année, la banque applique une gratification de 4% du montant présent sur le compte.

On appelle (u_n) le montant (en €) placé à la banque la n -ième année et on note $u_0 = 2000$.

1. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
2. Calculer u_1, u_2 et u_3 .
3. Déterminer la nature de la suite (croissante ? décroissante) ?.
4. On cherche un lien entre n et u_n afin de calculer rapidement tous les termes jusqu'à dépasser 4000€.
 (a) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n
 (b) Selon cette formule, au bout de combien d'année la nièce d'Anglise possèdera plus de 4000€ sur son compte en banque

Propriétés: (A retenir)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

— Si le premier terme de la suite est $u_0 \in \mathbb{R}$ alors pour tout entier naturel n , on a

$$u_n = u_0 \times q^n$$

— Si le premier terme de la suite est $u_1 \in \mathbb{R}$ alors pour tout entier naturel n , on a

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Exercice n° 11. : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Déterminer alors u_{50} et u_{65} .

Exercice n° 12. : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 6u_n$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Déterminer alors u_{30} et u_{101} .

Activité n° 5. : On considère une suite géométrique (u_n) strictement positive de raison inconnue mais dont on connaît quelques termes

n	10	11	12	13	14	15	16
u_n	3	...	27	...	...	...	2187

1. Déterminer la raison de cette suite puis compléter le tableau.
2. Plus généralement, si on connaît u_n et u_{n+2} , que vaut la raison q ? En déduire que $u_{n+1} = \sqrt{u_n \times u_{n+2}}$.

Propriétés

Trois nombres x, y et z sont des termes d'une suite

..... si la moyenne géométrique du plus petit et du plus grand est égale au

..... Autrement dit

$$y = \sqrt{x \times z}$$

Activité n° 6. : On veut exprimer simplement la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0 = 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

1. Compléter le tableau suivant



S_n	=	1	+	q	+	q^2	+	...	q^{n-1}	+	q^n		
qS_n	=		+	q	+	q^2	+	...	q^{n-1}	+	q^n	+	q^{n+1}
$S_n - qS_n$	=	...	+	...	+	...	+	...	...	+	...	+	...

2. En déduire une expression réduite de $S_n - qS_n$ puis exprimer S_n en fonction de n .

Propriétés: (Calcul d'une somme de termes d'une suite arithmétique)

Pour tout entier naturel n et pour tout réel $q \neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Et si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 , on a

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Plus simplement, la formule générale à retenir est

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Exercice n° 13. : On considère la suite géométrique (u_n) telle que $u_0 = 5$ et $u_{20} = 39$

1. Déterminer le nombre de termes entre u_0 et u_{20} .

2. Calculer $S = \sum_{k=0}^{20} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$

Exercice n° 14. : Chaque somme S est la somme de termes successifs d'une suite géométrique (u_n) .

Calculer S dans chacun des cas suivants

a. $S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 256$

b. $S = 1 + 5 + 25 + \cdots + 390625$

c. $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{59049}$

Exercice n° 15. : Vrai ou Faux. Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. La moyenne géométrique de $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{8}$ est égale à $\frac{1}{4}$

2. le terme générale d'une suite géométrique (u_n) de raison 3 et de premier terme $u_0 = 10$ est $u_n = 3 \times 10^n$.

3. Une suite géométrique (v_n) de raison 7 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$ a pour terme général $v_n = \frac{1}{3} \times 7^n$.

4. Si (w_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0 = 7$ alors $w_5 = 224$.